

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5	
Г л а в а I		Задачи
МЕХАНИКА		Ответы и решения
1. Кинематика материальной точки	7	203
2. Динамика материальной точки	9	204
3. Движение тела с переменной массой	14	205
4. Работа и энергия. Законы сохранения энергии и импульса..	17	206
5. Гармонические колебания материальной точки	21	208
6. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса	24	209
7. Движение твердого тела	28	210
8. Неинерциальные системы координат	33	212
9. Упругие деформации и элементы гидродинамики	35	213
10. Элементы релятивистской механики	38	215
Г л а в а II		
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ		
1. Электрическое поле в вакууме	41	218
2. Электрическое поле в веществе. Емкость	43	219
3. Постоянный ток. Электрические цепи	46	221
4. Магнитное поле тока	49	223
5. Электромагнитная индукция	52	225
6. Магнитное поле в веществе. Проводники в магнитном поле	55	227
7. Квазистационарное электромагнитное поле. Переменный ток	59	230
8. Уравнения Максвелла	65	233
9. Электромагнитные волны	67	234
10. Газовый разряд. Элементы физики плазмы	70	236
Г л а в а III		
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ		
1. Кинематика колебаний	72	238
2. Свободные колебания в линейных системах	76	242
3. Вынужденные колебания. Спектральный анализ линейных систем. Параметрические колебания	80	245

4. Волновое уравнение. Кинематика волн	85	249
5. Упругие волны	87	250
6. Электромагнитные волны	90	253
7. Интерференция волн. Когерентность	93	255
8. Дифракция волн. Разрешающая способность спектральных и оптических приборов. Пространственная фильтрация. Голография	99	258
9. Фазовая и групповая скорость. Дисперсия	105	262
10. Поляризация. Элементы кристаллооптики. Нелинейные оптические явления	107	264

Глава IV

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

1. Атомные спектры и планетарная модель атома	113	267
2. Корпускулярные свойства электромагнитного излучения ...	115	267
3. Волны де Бройля. Соотношения неопределенностей	117	270
4. Уравнение Шредингера. Операторы. Туннельный эффект ...	119	272
5. Дискретность энергетических состояний	121	274
6. Спин. Магнитные свойства атомов	125	278
7. Атом в магнитном поле	127	279
8. Свойства атомных ядер.	129	281
9. Ядерные реакции. Деление	130	282
10. Элементарные частицы	134	285

Глава V

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Элементы молекулярно-кинетической теории	136	287
2. Элементы термодинамики	142	291
3. Приложения законов термодинамики	150	294
4. Элементы статистической физики	154	295
5. Неравновесные процессы	162	300
6. Квантовая теория излучения	165	304
7. Кристаллические структуры твердых тел	172	309
8. Динамика атомов кристаллической решетки. Фононы	175	310
9. Электроны в кристаллах	181	314
10. Сверхпроводимость	192	321
11. Магнетизм веществ	196	325

Справочные данные	329

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый задачник по основам физики по своему содержанию соответствует современной программе курса физики для технических вузов и практически повторяет структуру учебника «Основы физики». Сборник содержит задачи различной степени трудности. В книге есть как сравнительно простые вычислительные задачи, необходимые для получения первоначальных навыков решения, так и достаточно сложные. Многие задачи, включенные в сборник, являются оригинальными. Некоторые задачи, их можно назвать классическими, встречаются в различных опубликованных задачниках. Часть задач взята из недавно изданного трехтомного «Сборника задач по физике», составленного коллективом преподавателей МФТИ. Авторы старались приблизить условия задач к реальным явлениям. В таких задачах рассматриваются физические эксперименты, как классические, так и современные, рассчитываются процессы, протекающие в различных технических и бытовых устройствах. К большинству задач в сборнике приводятся лишь ответы, часть задач снабжена указаниями, а к наиболее сложным имеются подробные решения. Кроме того, из методических соображений в каждом разделе даны решения некоторых характерных примеров. В начале каждого раздела приводится сводка основных определений и формул. В приложениях приведены современные значения физических констант и таблицы физических величин, необходимых для решения задач. По мнению авторов, в таком виде задачник фактически может служить независимым учебным пособием по физике и в то же время оставляет достаточно широкие возможности для самостоятельной работы. В книге используется международная система единиц (СИ), однако в некоторых задачах встречаются широко распространенные внесистемные единицы. Надеюсь, что задачник может принести пользу при изучении физики в вузах, в первую очередь технических, авторы заранее благодарны всем, кто сочтет возможным прислать свои замечания и предложения.

ЗАДАЧИ

Глава I. Механика

Глава II. Электричество и магнетизм

Глава III. Колебания и волны

Глава IV. Квантовая физика

Глава V. Статистическая физика и термодинамика

Глава I

МЕХАНИКА

1. Кинематика материальной точки

1. Скорость и ускорение точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки.

2. Проекции ускорения точки на касательную и нормаль к траектории

$$a_t = \frac{dv_t}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке, а v — модуль скорости.

3. Угловые скорость и ускорение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt}.$$

4. Связь между линейными и угловыми величинами

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}], \quad a_n = \omega^2 \rho, \quad a_t = \beta \rho,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки, а ρ — ее расстояние от оси вращения.

1.1. На рис. 1.1 изображен график зависимости модуля ускорения a от времени t для прямолинейно движущегося тела. Определить значение времени t_x , соответствующее максимальному значению модуля скорости движения тела.

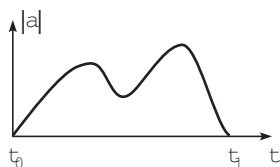


Рис. 1.1

1.2. Минометная батарея расположена у подножья горы с наклоном к горизонту 45° . Под каким углом α к горизонту надо установить ствол орудия, чтобы мина достигла склона на максимальной высоте? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.3. Под каким углом φ к горизонту следует бросить камень с вершины горы с уклоном 45° , чтобы он упал на склон на максимальном расстоянии?

1.4. Атлет толкает ядро с разбега. Считая, что скорость ядра относительно атлета в момент броска равна по величине скорости разбега, найти угол α , под которым следует выпустить ядро по

отношению к земле, чтобы дальность полета была максимальной. Высоту самого атлета не учитывать.

1.5. На одну пару обкладок электронного осциллографа подается синусоидальное, на другую — пилообразное напряжение. Какая картина будет видна на экране, если периоды синусоиды и «пилы» связаны соотношениями: $T_c/T_n = 2; 1; 1/2; 3/2$? Что будет, если T_c чуть-чуть больше, чем T_n ?

1.6. Тело движется по горке, имеющей форму, изображенную на рис. 1.2. В момент $t = 0$ тело находится в точке $x = 0, z = 0$ и имеет

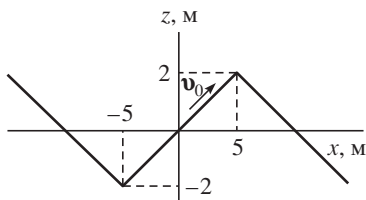


Рис. 1.2

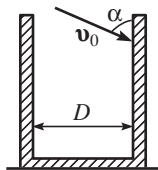


Рис. 1.3

скорость $v = v_0$. Нарисовать траекторию тела в фазовой плоскости с осями координат $z, dz/dt$. Скорость v_0 принимает два значения $(v_0)_1 = 5 \text{ м/с}, (v_0)_2 = 7 \text{ м/с}$.

1.7. В массивный цилиндр с внутренним диаметром D забрасывают шарик (рис. 1.3). Определить, при каких значениях v_0 и α траектория подъема шарика после удара о дно цилиндра будет симметрична траектории его падения и шарик не выскочит из цилиндра.

1.8. Определить скорость, с которой движется тень луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения, если оно наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что Солнце, Земля и Луна находятся в одной плоскости, а земная ось этой плоскости перпендикулярна. Скорость света считать бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями. Радиус лунной орбиты $R_L = 3,8 \cdot 10^5 \text{ км}$.

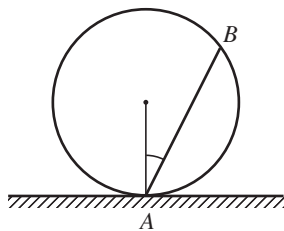


Рис. 1.4

1.9. Обруч радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω (рис. 1.4). Его движение можно рассматривать, как вращение вокруг мгновенной оси A . Верно ли утверждение, что ускорение точки B равно $\omega^2 x$ и направлено к точке A (x — расстояние между точками A и B)? Вывести формулу для ускорения точки B , рассматривая ее движение как вращение вокруг мгновенной оси A .

1.10. Колесо радиуса R равномерно катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью v . Найти координаты x и y

произвольной точки A на ободе колеса, выразив их как функции времени t или угла поворота колеса φ , полагая, что при $t = 0$: $\varphi = 0$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 1.5). По найденным выражениям для x и y построить график траектории точки на ободе колеса.

1.11. Автомобиль с колесами радиуса R движется со скоростью $\mathbf{v}$ по горизонтальной дороге, причем $v^2 > Rg$, где g — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту h может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колес автомобиля? Указать положение той точки на покрышке колеса, с которой при данной скорости движения автомобиля грязь будет забрасываться выше всего. Сопротивление воздуха движению отброшенной вверх грязи не учитывать.

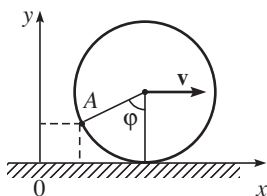


Рис. 1.5

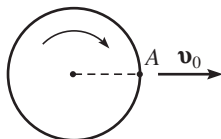


Рис. 1.6

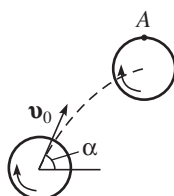


Рис. 1.7

1.12. Колесо радиуса R движется горизонтально со скоростью v и вращается с угловой скоростью ω . Точка A на ободе (рис. 1.6) описывает в пространстве некоторую траекторию. Найти радиус ее кривизны ρ в момент, когда точка находится на уровне центра колеса.

1.13. Диск радиуса R , вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω , брошен под углом α к горизонту со скоростью v_0 . Точка A на ободе описывает в пространстве некоторую траекторию (рис. 1.7). Найти радиус ее кривизны ρ в момент наибольшего подъема, если точка A находится при этом над центром колеса.

1.14. Вращение от двигателя автомобиля передается ведущим колесам через дифференциал — устройство, благодаря которому каждое из ведущих колес может вращаться с различной скоростью. Зачем нужен дифференциал? Почему нельзя оба ведущих колеса закрепить жестко на одной оси, которой передается вращение от двигателя?

2. Динамика материальной точки

Уравнение движения материальной точки массы m под действием силы $\mathbf{F}$ (второй закон Ньютона):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

В проекциях на касательную и нормаль к траектории это уравнение имеет вид

$$m \frac{dv_t}{dt} = F_t, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n.$$

1.15. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M (рис. 1.8). Другое тело, массы m , подвешено на нити, перекинутой через блок и привязанной к первому телу. Найти ускорение тел и натяжение нити. Трением тела массы M о плоскость и трением в блоке, а также массами блока и нити пренебречь.

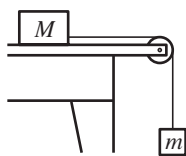


Рис. 1.8

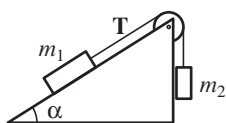


Рис. 1.9

1.16. На верхнем краю идеально гладкой наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить (рис. 1.9). На одном ее конце привязан груз массы m_1 , лежащий на наклонной плоскости, а на другом подвешен груз массы m_2 . Найти ускорение грузов и натяжение нити. Трением и массами блока и нити пренебречь. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α .

1.17. Три груза висят на блоках (рис. 1.10). Крайние блоки неподвижны, а средний может передвигаться. Считая заданными m_1 и m_2 определить массу груза m_3 , при котором средний блок будет оставаться неподвижным.

Трением и массами блоков и веревки пренебречь.

1.18. Два груза висят на блоках, а третий лежит на горизонтальной плоскости (рис. 1.11). Крайние блоки неподвижны, средний может передвигаться. Считая заданными m_1 и m_2 , определить m_3 , при котором груз 3 будет оставаться неподвижным. Трением и массами блоков и веревки пренебречь.

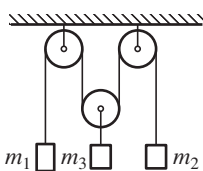


Рис. 1.10

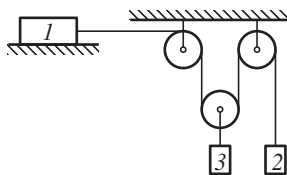


Рис. 1.11

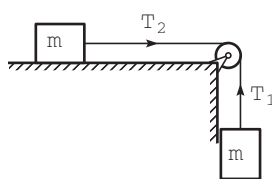


Рис. 1.12

1.19. Два груза соединены весомой нерастяжимой однородной нитью длины l (рис. 1.12). Массы грузов равны m , нити — $2m/3$. При какой длине вертикального отрезка нити x силы, действующие на грузы со стороны нити, окажутся равными ($T_1 = T_2$)? Чему равны эти силы? Каково ускорение системы в этом случае?

1.20. Камень массы M лежит на горизонтальной плоскости на расстоянии L от края пропасти. К камню прикреплен веревка, перекинутая через гладкий уступ; по веревке лезет обезьяна массы m . С каким постоянным (относительно земли) ускорением она должна лезть, чтобы успеть подняться раньше, чем упадет камень? Начальное расстояние от обезьяны до уступа равно $H < (M/m)L$. Коэффициент трения камня о плоскость равен k .

1.21. Через неподвижный невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая веревка. К одному ее концу привязан шест длины l , за который ухватилась обезьяна, масса которой равна массе шеста. Вся система уравновешена грузом, подвешенным к другому концу веревки. В начальный момент обезьяна находится в нижней точке шеста. На той же высоте находится груз. Обезьяна поднимается из нижней точки шеста в верхнюю. На какую высоту обезьяна и груз поднимутся относительно земли и на сколько опустится шест, если не учитывать трение в блоке? Тела подвешены на такой высоте, что движения их могут происходить беспрепятственно.

1.22. На столе лежит доска массы $M = 1$ кг, а на доске — груз массы $m = 2$ кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской $0,25$, а между доской и столом — $0,5$.

1.23. Груз массы m лежит на доске массы M . Коэффициент трения между доской и грузом равен k_1 , а между доской и опорой — k_2 . По доске наносят горизонтальный удар, и она начинает двигаться с начальной скоростью v_0 . Определить время, через которое прекратится скольжение груза по доске.

1.24. По наклонной плоскости с углом наклона α соскальзывает брусок массы m_1 , на котором находится второй брусок массы m_2 . Коэффициент трения нижнего бруска о наклонную плоскость равен k_1 , а коэффициент трения между брусками равен k_2 , причем $k_1 > k_2$. Определить, будет ли двигаться верхний брусок относительно нижнего и каковы ускорения обоих брусков. Как изменится результат, если $k_1 < k_2 < \tan \alpha$?

1.25. Плоская шайба массы M лежит на тонкой пластине на расстоянии L от ее края (рис. 1.13). Пластина с большой постоянной скоростью выдергивают из-под шайбы, которая при этом практически не успевает сместиться. Найти зависимость $x(t)$ расстояния, пройденного шайбой, от времени ее скольжения по поверхности стола. На какое расстояние в итоге сместится шайба? Считать, что сила трения между шайбой и доской, шайбой и столом прямо пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности γ .

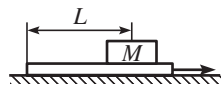


Рис. 1.13

1.26. Хоккейная шайба падает на лед со скоростью v_0 под углом α и продолжает скользить по льду. Найти скорость скольжения как функцию времени, если коэффициент трения k шайбы о лед не зависит скорости и силы давления шайбы на лед.



Рис. 1.14

1.27. На какой угол α наклонится автомобиль при торможении (рис. 1.14)? Центр масс расположен на равном расстоянии от передних и задних колес на высоте $h = 0,4$ м над землей. Коэффициент трения $k = 0,8$; расстояние между осями $l = 5h$. Упругость

всех пружин подвески одинакова и такова, что у неподвижного автомобиля на горизонтальной площадке их прогиб $\delta = 10$ см.

1.28. При торможении всеми четырьмя колесами тормозной путь автомобиля равен S_0 . Найти тормозные пути этого же автомобиля при торможении только передними и только задними колесами. Коэффициент трения скольжения $k = 0,8$. Центр масс автомобиля расположен на равном расстоянии от передних и задних колес и на высоте $h = l/4$, где l — расстояние между осями.

1.29. Длинная однородная балка массы M и длины l перевозится на двух коротких санях (рис. 1.15). Какую силу тяги нужно приложить для равномерного перемещения этого груза по горизонтали? Коэффициент трения для передних саней k_1 , для задних — k_2 . Сила тяги горизонтальна и приложена к балке на высоте h от поверхности земли. Массами саней пренебречь.

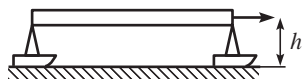


Рис. 1.15

1.30. Парусный буер массой 100 кг начинает движение под действием ветра, дующего со скоростью $v = 10$ м/с. Вычислить время, через которое мощность, отбираемая буером у ветра, будет максимальной, если сила сопротивления паруса ветру пропорциональна квадрату относительной скорости между буером и ветром с коэффициентом пропорциональности $k = 0,1$ кг/м. Силой трения пренебречь.

1.31. Тело бросают вертикально вверх в вязкой среде. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения тела. Вычислить время t_1 подъема тела на максимальную высоту его полета вверх и сравнить его со временем t_0 подъема в отсутствие трения. Начальная скорость тела в обоих случаях одинакова.

1.32. Из зенитной установки выпущен снаряд вертикально вверх со скоростью $v_0 = 600$ м/с. Сила сопротивления воздуха $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. Определить максимальную высоту H подъема снаряда и время его подъема τ до этой высоты, если известно, что при падении снаряда с большой высоты его установившаяся скорость $v_1 = 100$ м/с.

1.33. Из одного неподвижного облака через τ секунд одна за другой начинают падать две дождевые капли. Как будет изменяться со временем расстояние между ними? Решить задачу в двух случаях: 1) полагая, что сопротивление воздуха отсутствует; 2) полагая, что сопротивление воздуха пропорционально скорости капель.

1.34. С палубы яхты, бороздящей океан со скоростью 10 узлов (18 км/ч), принцесса роняет в воду жемчужину массы $m = 1$ г. Как далеко от места падения в воду может оказаться жемчужина на дне океана, если при ее движении в воде сила сопротивления $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$; $\beta = 10^{-4}$ кг/с?

1.35. Колобок, желая полакомиться подсолнечным маслом из бочонка, свалился туда и через $\delta t = 2$ с достиг дна. Масса Колобка $m = 200$ г, плотность его в $1,05$ раза больше плотности масла, а сила сопротивления при перемещении Колобка в масле $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$; $\beta = 0,1$ кг/с. Оценить высоту бочонка H , если он был залит до краев.

1.36. Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (рис. 1.16). Определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус забора R , коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора k . Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска много меньше R .

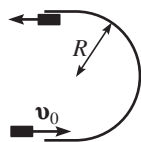


Рис. 1.16

1.37. Автомобиль движется с постоянной скоростью 90 км/ч по замкнутой горизонтальной дороге, имеющей форму эллипса с полуосями 500 м и 250 м.

На каких участках дороги ускорение автомобиля максимально и минимально? Чему равны максимальное и минимальное ускорения? Каков должен быть коэффициент трения между полотном дороги и шинами автомобиля, чтобы автомобиль при движении по эллипсу не заносило?

1.38. Велосипедист при повороте по кругу радиуса R наклоняется внутрь закругления так, что угол между плоскостью велосипеда и землей равен α . Найти скорость v велосипедиста.

1.39. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус R этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α .

1.40. Метатель посылает молот на расстояние $L = 70$ м по траектории, обеспечивающей максимальную дальность броска при данной начальной скорости. Какая сила действует на спортсмена при ускорении молота? Вес ядра молота 50 Н. Разгон ведется по окружности радиуса $R = 2$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.41. Шарик, подвешенный на нити длины l , лежит на поверхности гладкой сферы радиуса R . Расстояние от точки подвеса до центра сферы равно d (рис. 1.17). Вычислить натяжение нити и реакцию сферы для неподвижного шарика. Определить скорость v , которую надо сообщить шарiku в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, чтобы реакция сферы стала равной нулю. Шарик считать точечным. Нить невесома и нерастяжима.

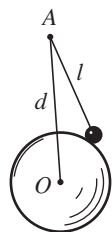


Рис. 1.17

1.42. На врытый в землю столб навита веревка, за один конец веревки тянут с силой $F = 10\,000$ Н.

Какую силу надо приложить к другому концу веревки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения веревки о столб $k = 1/\pi$. Веревка обвита вокруг столба 2 раза.

1.43. Нить перекинута через бревно. На концах нити укреплены грузы, имеющие массы m_1 и m_2 . Считая заданным коэффициент трения k нити о бревно, найти условие, при котором грузы будут оставаться в покое. Определить ускорение a системы грузов при нарушении условий равновесия.

1.44. Незакрепленная пружина жесткости k и массы M лежит на гладком горизонтальном столе. К одному из ее концов привязана тонкая нерастяжимая нить, перекинутая через неподвижный блок, укрепленный на краю стола. Нить свисает с него вертикально. К свисающему концу нити прикрепляют грузик массы m , который в определенный момент отпускают без начальной скорости. Определить удлинение пружины при движении. Жесткость ее считать достаточной, чтобы удлинение было мало по сравнению с первоначальной длиной.

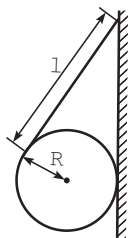


Рис. 1.18

1.45. Катушку ниток радиуса R пытаются, приклонив к стене, удержать на весу с помощью собственной нитки, отмотанной на длину l (рис. 1.18). При каких значениях коэффициента трения между катушкой и стеной это возможно?

3. Движение тела с переменной массой

Уравнение движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского):

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{u} + \mathbf{F}.$$

1.46. Найти выражения для ускорения и скорости платформы, движущейся под действием постоянной горизонтальной силы $\mathbf{F}$ (рис. 1.19), если на платформе лежит песок, который высыпается через отверстие в платформе. За 1 с высыпается масса δm песка, в момент времени $t = 0$ скорость платформы v равна нулю, а масса песка и платформы вместе равна M .

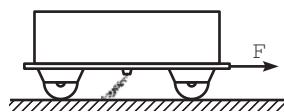


Рис. 1.19

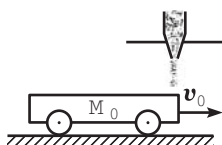


Рис. 1.20

1.47. Платформа длины L катится без трения со скоростью v_0 (рис. 1.20). В момент времени $t = 0$ она поступает к пункту погрузки песка, который высыпается со скоростью μ [кг/с]. Какое количество песка будет на платформе, когда она минует пункт погрузки? Масса платформы равна M_0 .

1.48. По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. На тележки падает μ [г/с] снега. В момент времени $t = 0$ массы тележек равны m_0 , а скорости — v_0 . Начиная с момента $t = 0$, один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса ее в дальнейшем останется

постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Определить скорости тележек. Какая тележка будет двигаться быстрее? Почему?

1.49. На краю массивной тележки (рис. 1.21) покоящейся на горизонтальной плоскости, укреплен цилиндрический сосуд радиуса r и высоты H , в нижней части которого имеется небольшое отверстие с пробкой. Сосуд наполнен жидкостью плотности ρ . В момент времени $t = 0$ пробку вынимают. Найти максимальную скорость, которую приобретает тележка, считая, что $H \gg r$ и $M \gg \pi r^2 \rho H$, где M — масса тележки с сосудом. Пояснить смысл этих ограничений. Трением в подшипниках тележки, трением качения и внутренним трением жидкости пренебречь.

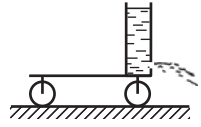


Рис. 1.21

1.50. Два ведра с водой висят на веревке (рис. 1.22), перекинутой через блок. Масса одного ведра M_0 , масса другого ведра $M_0 + \Delta m$. В начальный момент более легкому ведру сообщается скорость v_0 , направленная вниз. В этот момент начинается дождь, и в результате масса каждого ведра увеличивается с постоянной скоростью. Через какое время τ скорость ведер обратится в ноль? Трением, массами веревки и блока пренебречь.

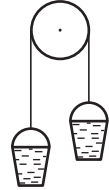


Рис. 1.22

1.51. Космический корабль стартует с начальной массой m_0 и нулевой начальной скоростью в пространстве, свободном от поля тяготения. Масса корабля меняется во времени по закону: $m = m_0 \exp(-\lambda t)$, скорость продуктов сгорания относительно корабля постоянна и равна u . Какое расстояние x пройдет корабль к моменту, когда его масса уменьшится в 1000 раз?

1.52. Для поражения цели с самолета запускают ракету. Самолет летит горизонтально на высоте $H = 8$ км со скоростью $v_0 = 300$ м/с. Масса ракеты изменяется по закону $m(t) = m_0 \exp(-t/\tau)$ и уменьшается за время полета к цели в e раз. Скорость истечения газов относительно ракеты $u = 1000$ м/с, корпус ракеты во время ее полета горизонтален. Каково расстояние L от цели до точки, над которой находился самолет в момент запуска ракеты? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.53. Найти связь между массой ракеты $m(t)$, достигнутой ею скоростью $v(t)$ и временем t , если ракета движется вертикально вверх в поле тяжести Земли. Скорость газовой струи относительно ракеты u считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения g с высотой не учитывать. Какую массу газов $\mu(t)$ должна каждую секунду выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной относительно Земли?

1.54. Человек поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью небольшого реактивного двигателя за спиной. Двигатель

выбрасывает струю газов вертикально вниз со скоростью относительно человека $u = 1000$ м/с. Расход топлива автоматически поддерживается таким, чтобы в любой момент, пока работает двигатель, реактивная сила уравновешивала вес человека с грузом. Сколько времени человек может продержаться на постоянной высоте, если его масса $m_1 = 70$ кг, масса двигателя без топлива $m_2 = 10$ кг, начальная масса топлива $m_0 = 20$ кг? Какое расстояние l в горизонтальном направлении может преодолеть человек, если он разбежался по земле, приобрел горизонтальную скорость $v = 10$ м/с, а затем включил двигатель, поддерживающий его в воздухе на постоянной высоте?

1.55. Космическая станция движется по направлению к центру Луны со скоростью $v_0 = 2,1$ км/с. Для осуществления мягкой посадки на поверхность Луны включается двигательная установка на время $t = 60$ с, выбрасывающая газовую струю со скоростью $u = 2$ км/с относительно станции в направлении скорости станции. В конце торможения скорость уменьшилась практически до нуля. Во сколько раз уменьшилась масса станции за это время, если торможение осуществлялось вблизи поверхности Луны, где ускорение свободного падения можно считать постоянным и равным $g/6$ ($g \approx 10$ м/с²)

1.56. Насколько максимальная скорость, достижимая в свободном космическом пространстве с помощью двухступенчатой ракеты, больше, чем в случае одноступенчатой ракеты? Масса второй ступени двухступенчатой ракеты составляет $M_1/M_2 = \alpha = 0,1$ от массы первой ступени, а отношение массы горючего к полной массе ступени во всех случаях равно $M_r/M = k = 0,9$. Относительно ракет скорости истечения газов в сравниваемых ракетах одинаковы и равны $u = 2000$ м/с.

1.57. Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по величине. Для этого предлагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. В каком из этих двух способов потребуются меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

1.58. Ракета запускается с небольшой высоты и летит все время горизонтально с ускорением a . Под каким углом к горизонту направлена реактивная струя? Сопротивлением воздуха пренебречь.

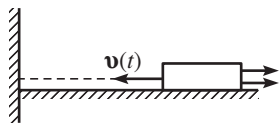


Рис. 1.23

1.59. На некотором расстоянии от вертикальной стенки на гладкой горизонтальной поверхности лежит игрушечная ракета (рис. 1.23). Из состояния покоя ракета начинает двигаться перпендикулярно стенке по направлению к ней. Через промежуток времени T_1 происходит абсолютно упругий удар ракеты о стенку. При этом ракета не

меняет своей ориентации относительно стенки. Определить, через какое минимальное время T_2 , после удара скорость ракеты окажется равной нулю. Считать, что скорость истечения газов относительно ракеты постоянна, а масса ракеты зависит от времени по закону $m(t) = m_0 - \alpha t$. Время удара о стенку мало по сравнению с T_1 . Выполнить вычисления для $m_0 = 1$ кг; $\alpha = 0,01$ кг/с; $T_1 = 10$ с.

4. Работа и энергия. Законы сохранения энергии и импульса

1. Приращение импульса тела (или системы тел):

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_1^2 \mathbf{F} dt,$$

где $\mathbf{F}$ — сумма всех внешних сил, действующих на это тело (систему тел).

2. Работа силы

$$A = \int \mathbf{F} ds = \int F_s ds.$$

3. Мощность силы

$$P = \mathbf{F} \mathbf{v}.$$

4. Приращение кинетической энергии тела

$$K_2 - K_1 = A,$$

где A — работа всех сил, действующих на тело.

5. Изменение потенциальной энергии тела в силовом поле

$$U_2 - U_1 = -A,$$

где A — работа сил поля при перемещении тела из положения 1 в положение 2.

6. Связь между силой и потенциальной энергией тела в поле

$$\mathbf{F} = -\nabla U; \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

1.60. На частицу массы 1 г действует сила $F_x(t)$, график которой (рис. 1.24) представляет собой полуокружность. Найти изменение скорости Δv_x , вызванное действием силы, и работу этой силы, если начальная скорость $v_{0x} = 4$ см/с. Почему работа зависит от начальной скорости?



Рис. 1.24

1.61. Санки могут спускаться с горы из точки A в точку B по путям AaB , AbB и AcB (рис. 1.25). В каком случае они придут в точку

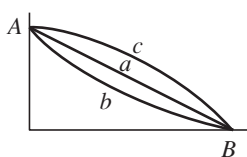


Рис. 1.25

В с большей скоростью? Считать, что сила трения, действующая на санки, пропорциональна нормальному давлению их на плоскость, по которой они скользят.

1.62. Какую работу надо затратить, чтобы втащить (волоком) тело массы m на горку с длиной основания L и высотой H , если коэффициент трения между телом и поверхностью горки равен k ? Угол наклона

поверхности горки к горизонту может меняться вдоль горки, но его знак остается постоянным.

1.63. Автомобиль «Жигули» на скорости $v = 50$ км/час способен двигаться вверх по дороге с наибольшим уклоном $\alpha = 16^\circ$. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, составляет $N = 20$ л. с. (1 л. с. = 736 Вт). Найти максимальную мощность двигателя, если масса автомобиля 1200 кг.

1.64. Отчаянно газуя и пробуксовывая всеми четырьмя ведущими колесами, автомобилист на «Ниве» пытается въехать по заснеженной и обледенелой дороге, на которой, к счастью, выбита устойчивая колея, на длинный крутой подъем, перед которым установлен знак 10% (т.е. угол подъема $\alpha = \arcsin 0,1$). После предварительного разгона на горизонтальном участке (также с пробуксовкой) ему это удастся. На обратном пути по уже размякшей дороге он отмечает по спидометру, что длина разгона оказалась равной пути подъема. Пользуясь этими данными, найти коэффициент трения шин об обледенелую дорогу.

1.65. Три лодки одинаковой массы m идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массы m_1 . Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

1.66. Лодка длины L_0 наезжает, двигаясь по инерции, на отмель и останавливается из-за трения, когда половина ее длины оказывается на суше (рис. 1.26). Какова была начальная скорость лодки v ? Коэффициент трения равен k .



Рис. 1.26

1.67. На покоящейся тележке массы M укреплен пружина жесткости k , которая находится в сжатом состоянии, соприкасаясь с покоящимся грузом массы m (рис. 1.27). Пружина сжата на расстояние x_0 от равновесного положения, а расстояние от груза до правого открытого края тележки равно L , длина пружины в несжатом состоянии меньше L . Пружину освобождают, и она выталкивает груз с тележки. Какова будет скорость v груза, когда он соскользнет с тележки? Коэффициент трения груза о тележку равен α , трением тележки о поверхность пренебречь.

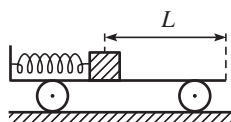


Рис. 1.27

1.68. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l . Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

1.69. На прямоугольный трехгранный клин ABC массы M , лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин BED массы m (рис. 1.28). Определить, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка D совместится с C . Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b .

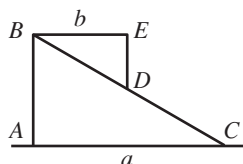


Рис. 1.28

1.70. Математический маятник (груз малых размеров на легком подвесе длины l) находится в положении равновесия. Определите, какую скорость u надо сообщить грузу, чтобы он мог совершить полный оборот, для двух случаев: груз подвешен а) на жестком стержне и б) на нити.

1.71. Брусок 1 лежит на таком же бруске 2 (рис. 1.29 а). Оба они как целое скользят по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью

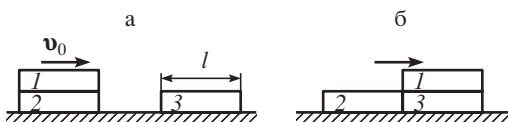


Рис. 1.29

v_0 и сталкиваются с аналогичным покоящимся бруском 3. Удар бруска 2 о брусок 3 абсолютно неупругий (бруски 2 и 3 слипаются, рис. 1.29 б). Чему равна длина брусков l , если известно, что брусок 1 прекратил свое движение относительно брусков 2 и 3 из-за трения после того, как он полностью переместился с 2 на 3? Коэффициент трения между брусками 1 и 3 равен k . Трением о поверхность, а также между брусками 1 и 2 пренебречь.

1.72. Для натягивания тетивы на лук лучнику необходимо приложить усилие $F_1 = 800$ Н. Перед выстрелом лучник удерживает стрелу с силой $F_2 = 200$ Н. Определить максимальную дальность поражения цели на высоте, равной росту лучника. Масса стрелы $m = 50$ г. Тетива представляет собой легкую нерастяжимую нить длины $l_0 = 1,5$ м. Изменением деформации лука в процессе выстрела пренебречь.

1.73. На наклонной плоскости стоит ящик с песком; коэффициент трения k ящика о плоскость равен тангенсу угла α наклона плоскости. В ящик вертикально падает некоторое тело и остается в нем. Будет ли двигаться ящик после падения в него тела?

1.74. По наклонной плоскости под углом α к горизонту движется брусок. В тот момент, когда его скорость равна V , на брусок вертикально падает со скоростью v пластилиновый шарик такой же массы, как и брусок, и прилипает к нему. Определить время τ , через которое брусок с шариком остановятся. Коэффициент трения равен k . При каком значении k это возможно?

1.75. Диск радиуса R и толщины δ насажен на вал радиуса r таким образом, что оказывает на единицу поверхности соприкосновения давление P (рис. 1.30). Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей μ . Какую силу надо приложить к диску, чтобы снять его, двигая со скоростью v , с вала, вращающегося с угловой скоростью ω ? Во сколько раз она отличается от силы, с которой придется снимать диск с неподвижного вала? (Вал прокручивается относительно диска, диск движется поступательно.)

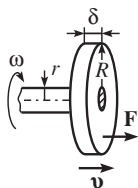


Рис. 1.30

1.76. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической $\bar{K}$ и потенциальной $\bar{U}$ энергии.

1.77. Два идеально упругих шарика с массами m_1 и m_2 движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями v_1 и v_2 . Во время столкновения шарик 1 начинает деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации Π в момент, когда она максимальна.

1.78. Шар 1, летящий со скоростью v , ударяется в покоящийся шар 2, масса которого в 3 раза больше массы налетающего (рис. 1.31). Найти скорости шаров после удара, если в момент столкновения угол между линией, соединяющей центры шаров, и скоростью налетающего шара до удара равен 60° . Удар абсолютно упругий. Трения нет.

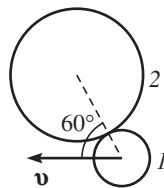


Рис. 1.31

1.79. Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться частицы после лобового столкновения?

1.80. Две частицы, массы которых равны m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол $\alpha = 30^\circ$ в лабораторной системе отсчета или на угол $\beta = 60^\circ$ в системе центра масс. Определить отношение m_1/m_2 .

1.81. Ядерная реакция ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n$ (литий неподвижен) имеет порог $E_{\text{пор}} = 1,88$ МэВ, т.е. может идти только тогда, когда энергия протона равна или превосходит величину $E_{\text{пор}}$. При каких энергиях бомбардирующих протонов E_p нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

1.82. Ядра дейтерия D и трития T могут вступать в реакцию $D + T \rightarrow {}^4\text{He} + n + 17,6$ МэВ, в результате которой образуются нейтроны и α -частицы. В каждой реакции выделяется энергия 17,6 МэВ. Определить, какую энергию уносит нейтрон и какую α -частица. Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

5. Гармонические колебания материальной точки

1. Уравнение собственных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

где ω — круговая частота собственных колебаний, связанная с периодом T этих колебаний соотношением $\omega = 2\pi/T$.

2. Общее решение этого уравнения

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где постоянные x_0 (амплитуда) и φ_0 (начальная фаза) определяются начальными условиями конкретной задачи.

3. Период собственных колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l — длина маятника, g — ускорение свободного падения.

1.83. Период малых колебаний шарика, подвешенного на спиральной пружине, равен $T = 0,5$ с. Пренебрегая массой пружины, найти статическое удлинение пружины x под действием веса того же шарика.

1.84. Небольшой шарик массы m , летящий горизонтально со скоростью v , ударяется в вертикально расположенную упругую сетку. Считая, что деформация сетки пропорциональна приложенной силе с коэффициентом пропорциональности k , найти время t , за которое сетка получит максимальную деформацию.

1.85. Материальная точка совершает одномерные колебания в треугольной потенциальной яме $U(x) \propto |x|$ (рис. 1.32) с периодом T_0 . Найти период гармонических колебаний T этой точки в параболической

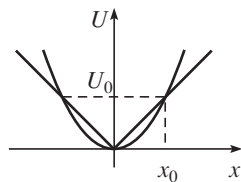


Рис. 1.32

потенциальной яме $U(x) \propto x^2$, если максимальная потенциальная энергия точки и амплитуда колебаний в обоих случаях одинаковы.

1.86. Шарик массы m подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с коэффициентами упругости k_1 и k_2 (рис. 1.33). Определить период его вертикальных колебаний.

1.87. На доске лежит груз массы 1 кг. Доска совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом $T = 1/2$ с и амплитудой $A = 1$ см. Определить величину силы давления F груза на доску.

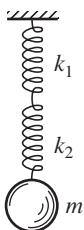


Рис. 1.33

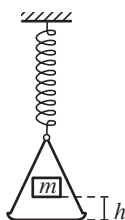


Рис. 1.34

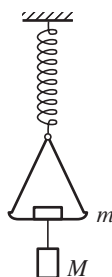


Рис. 1.35

1.88. На чашку весов, подвешенную на пружине, падает с высоты h груз массы m и остается на чашке (рис. 1.34), не подпрыгивая относительно нее. Чашка начинает колебаться. Коэффициент упругости пружины k . Определить амплитуду A колебаний (массой чашки и пружины по сравнению с массой груза пренебречь).

1.89. На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик (рис. 1.35). Масса чашки равна m , масса грузика пренебрежимо мала. Ко дну чашки подвешен груз массы M . Вся система находится в равновесии. При каком соотношении между массами M и m грузик на чашке начнет подсакивать, если быстро снять груз M ?

1.90. Тело массы m колеблется без трения внутри коробки массы M , лежащей на горизонтальной поверхности стола. К телу прикреплены пружины с жесткостями k_1 и k_2 , концы которых закреплены на боковых стенках коробки (рис. 1.36). Определить, при какой амплитуде колебаний коробка начнет двигаться по поверхности стола, если коэффициент трения между коробкой и столом равен μ .

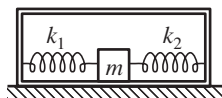


Рис. 1.36

1.91. Тело массы m колеблется в вертикальном направлении внутри коробки массы M , лежащей на горизонтальной поверхности стола. К телу прикреплены пружины с жесткостями k_1 и k_2 (рис. 1.37), концы которых закреплены на верхней и нижней стенках коробки. Определить, при какой амплитуде колебаний коробка начнет подпрыгивать, отрываясь от поверхности стола, на котором лежит.

1.92. Тело массы m_0 колеблется без трения внутри коробки массы M , лежащей на гладком столе. К телу прикреплены пружины одинаковой жесткости, концы которых закреплены на боковых стенках коробки (рис. 1.38). Вначале коробка закреплена, а затем ее отпустили и она может сво-

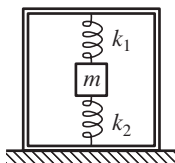


Рис. 1.37

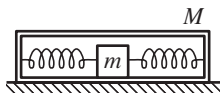


Рис. 1.38

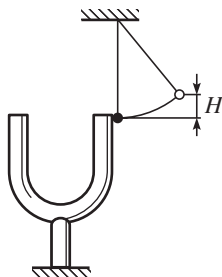


Рис. 1.39

бодно перемещаться по столу. Определить отношение частот колебаний в этих случаях.

1.93. Академик А.Ф. Иоффе для определения амплитуды колебания ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис. 1.39). Какова амплитуда колебания A ножки камертона, если максимальный подъем шарика при многочисленных опытах после одного отскока оказался равным H ? Частота колебаний ножки камертона ν . Масса шарика много меньше массы камертона.

1.94. Гантель длины $2l$ скользит без трения по сферической поверхности радиуса R (рис. 1.40). Гантель представляет собой две точечные массы, соединенные невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении: а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении; б) в плоскости рисунка.

1.95. Найти частоту малых колебаний шарика массы m , подвешенного на пружине, если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т.е. $F = k(l - l_0)^2$, где l_0 — длина пружины в ненагруженном состоянии.

1.96. Два незакрепленных шарика с массами m_1 и m_2 соединены друг с другом спиральной пружинкой с коэффициентом упругости k . Определить период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки.

1.97. По гладкой доске без трения скользят со скоростью v_0 два груза равной массы m , соединенные пружиной жесткости k , находящейся в несжатом состоянии (рис. 1.41). В момент $t = 0$

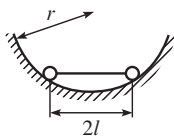


Рис. 1.40

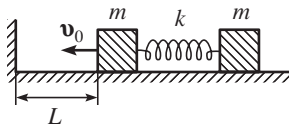


Рис. 1.41

левый груз находится на расстоянии L от вертикальной стенки, в направлении к которой они оба движутся. Через какое время t центр масс окажется в том же положении, что и в момент $t = 0$? Удар о стенку считать мгновенным и абсолютно упругим.

1.98. Часы с маятником, будучи установленными на столе, показывали верное время. Как изменится ход часов, если их установить на свободно плавающем поплавке? Масса M часов вместе с поплавком в 10^3 раз превосходит массу маятника m .

1.99. Система состоит из двух одинаковых масс m , скрепленных пружиной жесткости k . На одну из масс действует гармоническая сила с амплитудным значением f_0 , направленная вдоль пружины. Найти амплитуду колебаний растяжения пружины, если частота вынуждающей силы вдвое превышает собственную частоту системы.

6. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

1. Уравнение моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

где $\mathbf{L}$ — момент импульса системы, а $\mathbf{M}$ — результирующий момент внешних сил.

2. Момент импульса $\mathbf{L}$ в произвольной инерциальной системе отчета связан с моментом $\mathbf{L}'$ в системе центра масс соотношением

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + [\mathbf{r}_c \mathbf{p}],$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс, $\mathbf{p}$ — импульс системы.

3. Сила гравитационного взаимодействия между двумя точечными массами (закон всемирного тяготения):

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

4. Потенциал гравитационного поля точечной массы

$$\varphi = \frac{\gamma m}{r}.$$

5. Первая и вторая космические скорости

$$v_{1к} = \sqrt{gR_3}, \quad v_{2к} = \sqrt{2gR_3},$$

где R_3 — радиус Земли.

Квадраты периодов обращения планет Солнечной системы относятся как кубы больших полуосей их орбит (третий закон Кеплера), т.е. отношение

$$a^3/T^3 = K$$

постоянно для всех планет Солнечной системы — так называемая постоянная Кеплера.

1.100. Прочная доска длины $2l = 4$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее середину. Один конец доски прикреплен жесткой пружиной к полу (высота опоры много меньше длины доски). На этом конце лежит шар массы $m = 10$ кг. На другой конец с высоты $h = 1,5$ м прыгает мальчик массы $M = 30$ кг (рис. 1.42). При приземлении происходит толчок, доска поворачивается, шар подбрасывается вверх и на доску не возвращается. Определить, на какую высоту x подбросит мальчика растянувшаяся пружина. Массой доски пренебречь.

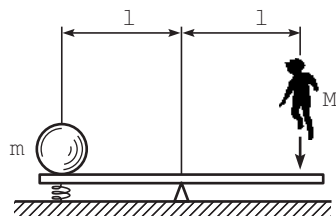


Рис. 1.42

1.101. Расположенная горизонтально система из трех одинаковых маленьких шариков, соединенных невесомыми жесткими спицами длины l , падает с постоянной скоростью v_0 и ударяется левым шариком о массивный выступ с горизонтальной верхней поверхностью (рис. 1.43). Определить угловую скорость вращения системы ω сразу после удара, считая удар абсолютно упругим.

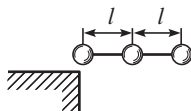


Рис. 1.43

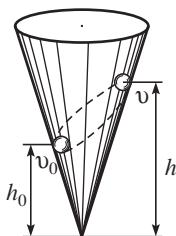


Рис. 1.44

1.102. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 1.44). В начальный момент шарик находился на высоте h_0 , а скорость его v_0 была горизонтальной. Найти v_0 , если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h , а затем начинает опускаться. Найти также скорость v шарика в наивысшем положении.

1.103. Легкий стержень вращается с угловой скоростью ω_0 по инерции вокруг оси, перпендикулярной ему и проходящей через его середину. По стержню без трения может двигаться тяжелая муфта массы m , которая удерживается с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. 1.45). Определить закон изменения угловой скорости системы по мере подтягивания муфты к оси вращения, закон изменения силы натяжения нити и работу подтягивания муфты с радиуса R_0 до радиуса $R_0/2$.

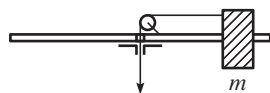


Рис. 1.45

1.104. Ракета с космонавтом стартует с поверхности Земли и движется вертикально вверх так, что космонавт испытывает все время постоянную перегрузку $n = 1$. После того, как скорость ракеты стала равной первой космической скорости, двигатели выключают. Определить, покинет ли ракета пределы Земли или упадет на нее. Перегрузкой n называют отношение $n =$

$= (P - P_0)/P_0$, где P_0 — вес космонавта на Земле, P — вес, который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в полете.

1.105. Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли увеличилась и сделалась равной массе Солнца, а расстояние между ними осталось без изменения?

1.106. Материальная точка массы m взаимодействует с неподвижным центром. Потенциальная энергия есть $U = a/r + br$. В начальный момент точка находилась на расстоянии $r_0 = 2\sqrt{a/b}$, от центра и имела нулевую скорость. Найти: 1) минимальное расстояние $r_{\min}$ на которое сможет приблизиться точка к центру; 2) устойчивое положение равновесия материальной точки; 3) величину силы, действующей на материальную точку в точках r_0 и $r_{\min}$ 4) «первую космическую скорость» при движении материальной точки вокруг центра.

1.107. Космический корабль «Аполлон» обращался вокруг Луны по эллиптической орбите с максимальным удалением от поверхности Луны (в апоселении) 312 км и минимальным удалением (в периселении) 112 км. На сколько надо было изменить скорость корабля, чтобы перевести его на круговую орбиту с высотой полета над поверхностью Луны 112 км, если двигатель включался на короткое время, когда корабль находился в периселении? (Средний радиус Луны $R = 1738$ км, ускорение свободного падения на ее поверхности $g = 162 \text{ см/с}^2$.)

1.108. Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0 , стреляют в направлении, составляющем угол 120° к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?

1.109. Искусственный спутник Земли вращается по круговой орбите радиуса R с периодом T_1 . В некоторый момент на очень короткое время был включен реактивный двигатель, увеличивший скорость спутника в α раз, и спутник стал вращаться по эллиптической орбите. Двигатель сообщал спутнику ускорение все время в направлении движения. Определить максимальное расстояние спутника от центра Земли, которого он достигнет после включения двигателя. Найти также период T_2 , обращения спутника по новой (эллиптической) орбите.

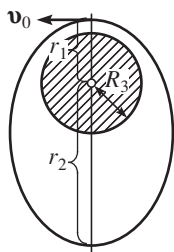


Рис. 1.46

1.110. Спутник поднят ракетой-носителем вертикально до максимальной высоты, равной $R = 1,25R_3$ (R_3 — радиус Земли), отсчитываемой от центра Земли. В верхней точке подъема ракетное устройство сообщило спутнику азимутальную (горизонтальную) скорость, равную по величине первой космической скорости: $v_0 = v_{1к}$ и вывело его на эллиптическую орбиту (рис. 1.46). Каковы максимальное и минимальное удаления спутника от центра Земли?

1.111. По круговой окололунной орбите с радиусом, равным удвоенному радиусу Луны, вращается орбитальная станция с космическим кораблем. Корабль покидает станцию в направлении ее движения с

относительной скоростью, равной половине начальной орбитальной скорости станции. Каково должно быть соотношение масс корабля и станции m_k/m_c для того, чтобы станция не упала на Луну?

1.112. Вокруг Луны по эллиптической орбите обращается космическая станция, при этом ее наименьшее и наибольшее расстояния от лунной поверхности равны соответственно $2R$ и $4R$, где R — радиус Луны. В момент нахождения станции в наименее удаленной от Луны точке ее покидает ракета в направлении по касательной к орбите станции. Определить, в каких пределах может изменяться стартовая скорость ракеты u относительно станции, чтобы последняя продолжала свое существование (т.е. не врезалась бы в Луну и не улетела бы в бесконечность). Масса станции в три раза больше массы ракеты, ускорение свободного падения на поверхности Луны g .

1.113. Вокруг Луны по эллиптической орбите обращается космическая станция, при этом ее наименьшее и наибольшее расстояния от лунной поверхности равны соответственно R и $7R$, где R — радиус Луны. В момент нахождения станции в наиболее удаленной от Луны точке ее покидает ракета в направлении по касательной к орбите станции. В результате вылета ракеты станция переходит на круговую окололунную орбиту. Определить, чему равна стартовая скорость ракеты u относительно станции. Масса станции в девять раз больше массы ракеты, ускорение свободного падения g на поверхности Луны считать известным.

1.114. Комета Брукса принадлежит к семейству Юпитера, т.е. максимальное ее удаление от Солнца равно радиусу орбиты Юпитера. Минимальное расстояние кометы от Солнца равно радиусу круговой орбиты астероида Венгрия. Зная периоды обращения вокруг Солнца кометы Брукса $T = 6,8$ г. и Юпитера $T_1 = 11,86$ г., определить период обращения Венгрии T_2 .

1.115. Космический аппарат «ВЕГА» на первом этапе полета посетил окрестности Венеры. Выйдя из поля тяготения Земли, он двигался по эллипсу с афелием у орбиты Земли и перигелием у орбиты Венеры. С какой скоростью относительно Венеры он вошел в окрестность планеты? Известна орбитальная скорость Земли $V_3 = 29,8$ км/с и отношение радиусов орбит Венеры и Земли $k = 0,723$. Орбиты обеих планет можно считать круговыми.

1.116. По круговой окололунной орбите с радиусом, равным утроенному радиусу Луны, вращается стартовая «платформа» с космическим кораблем. Корабль покидает «платформу» в направлении ее движения с относительной скоростью, равной первоначальной орбитальной скорости «платформы», после чего она падает на Луну. Определить угол α , под которым «платформа» врезается в лунную поверхность, если отношение масс «платформы» и корабля $m_{пл}/m_{кор} = 2$.

7. Движение твердого тела

1. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z,$$

где I — момент инерции тела относительно оси z .

2. Теорема Штейнера

$$I = I_c + ma^2,$$

где I_c — момент инерции относительно центра масс.

3. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

$$K = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2.$$

4. Основное уравнение простейшей теории гироскопа (связь угловой скорости Ω прецессии гироскопа с его моментом импульса $\mathbf{L}$ и моментом внешних сил $\mathbf{M}$):

$$[\Omega \mathbf{L}] = \mathbf{M}.$$

1.117. К шкиву креста Обербека (рис. 1.47) прикреплена нить, к которой подвешен груз массы $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т. е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приблизительно натяжение во время рывка $T_{\text{рыв}}$, радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза массы $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

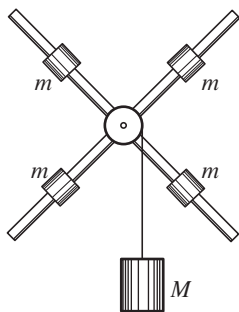


Рис. 1.47

1.118. На тяжелый барабан, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотан легкий гибкий шнур. По шнуру лезет вверх обезьяна массы M . Определить ее ускорение относительно шнура, если ее скорость относительно земли постоянна. Момент инерции барабана равен I , его радиус R .

1.119. На сплошной цилиндр массы m намотана тонкая невесомая нить. Другой конец прикреплен к потолку лифта, движущегося вверх с ускорением a . Найти ускорение цилиндра относительно лифта и силу натяжения нити.

1.120. К боковой поверхности вертикально расположенного сплошного цилиндра массы M , радиуса R и высоты H прикреплена трубка, согнутая в виде одного витка спирали, по которой может

скользить без трения шарик массы m (рис. 1.48). Цилиндр может вращаться вокруг своей оси. Шарик опускают в верхнее отверстие трубки без начальной скорости. Найдите скорость шарика после вылета из нижнего конца трубки. Массой трубки и трением в оси пренебречь. Считать, что $2\pi R = 2H$, а масса шарика $m = M/4$.

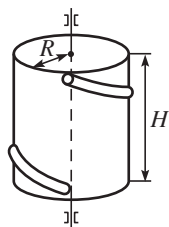


Рис. 1.48

1.121. Карусель представляет собой однородный массивный диск массы M_0 , вращающийся без трения вокруг вертикальной оси. В момент времени $t = 0$, когда угловая скорость карусели достигает значения ω_0 , выключается мотор, вращающий карусель. С этого же момента карусель начинает равномерно покрываться снегом, падающим в вертикальном направлении. Определить скорость вращения карусели ω в произвольный момент времени t , если ежесекундное приращение массы снега на карусели равно μ . Как изменится результат, если на карусели находится человек, который непрерывно сгребает лопатой весь падающий снег к периферии и сбрасывает его в радиальном направлении? Масса человека гораздо меньше массы карусели.

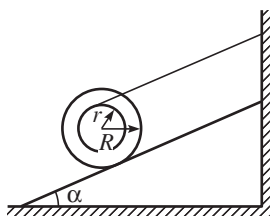


Рис. 1.49

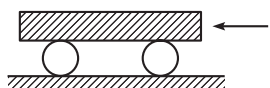


Рис. 1.50

1.122. Катушка с ниткой находится на наклонной плоскости. Свободный конец нити прикреплен к стене так, что нитка параллельна этой плоскости (рис. 1.49). Определить ускорение, с которым катушка движется по наклонной плоскости. Масса катушки m , момент инерции катушки относительно ее оси I_0 , коэффициент трения катушки с этой плоскостью k .

1.123. Доска массы M (рис. 1.50) лежит на двух одинаковых цилиндрических катках массы m каждый. Доску начинают толкать в горизонтальном направлении с силой F , и система приходит в движение

так, что проскальзывание доски по каткам и катков по поверхности отсутствует. Определить ускорение доски.

1.124. С колеса движущегося автомобиля соскакивает декоративный колпак, который, попрыгав по дороге, начинает катиться сразу без скольжения. При какой скорости автомобиля v_0 это возможно? Радиус колеса $R = 40$ см, колпак можно рассматривать как однородный диск радиуса $r = 20$ см, коэффициент трения между колпаком и дорогой $k = 0,2$.

1.125. Длинная тонкая доска лежит на гладком столе вплотную к гладкой стене. По доске без проскальзывания катится цилиндр в направлении, перпендикулярном стене (рис. 1.51). Цилиндр абсолютно упруго ударяется о стену. Определить долю первоначальной

кинетической энергии, перешедшей в тепло при трении между цилиндром и доской к моменту, когда цилиндр скатится с доски. Масса цилиндра равна половине массы доски. Трение качения не учитывать.

1.126. Шарик сначала лежит на столе так, что его центр C находится над самым краем, затем начинает падать, поворачиваясь вокруг края стола (точка A на рис. 1.52). Найти коэффициент трения скольжения k , если шарик начинает проскальзывать после поворота на угол $\varphi = 30^\circ$.

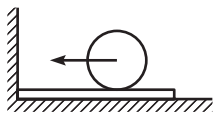


Рис. 1.51

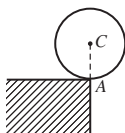


Рис. 1.52

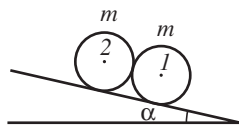


Рис. 1.53

1.127. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр радиуса r ставится без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться вверх. Определить время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

1.128. С шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатываются без проскальзывания два цилиндра, имеющие одинаковую массу m и один и тот же радиус (рис. 1.53). Один из них сплошной, другой — полый, тонкостенный. Коэффициент трения между цилиндрами k . Как следует расположить полый цилиндр — впереди сплошного или за ним, чтобы цилиндры скатывались вместе? Найти ускорение a цилиндров и силу давления N одного на другой.

1.129. Обруч радиуса R бросают вперед со скоростью v_0 и сообщают ему одновременно угловую скорость ω_0 . Определить минимальное значение угловой скорости $\omega_{\min}$, при котором обруч после движения с проскальзыванием покатится назад. Найти значение конечной скорости v , если $\omega > \omega_{\min}$. Трением качения пренебречь.

1.130. Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в такой же покоящийся бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движение перейдет в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

1.131. Шар радиуса R , раскрученный вокруг горизонтальной оси до угловой скорости ω_0 , кладут на шероховатый стол и толкают

горизонтально на высоте h ($h < R$) от стола (рис. 1.54) так, что шар приобретает поступательную скорость v_0 в направлении, перпендикулярном оси вращения. При какой угловой скорости ω_0 шар через некоторое время после начала движения начнет двигаться в обратную сторону?

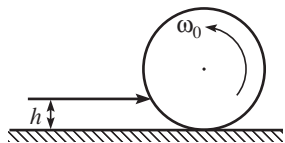


Рис. 1.54

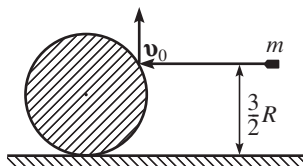


Рис. 1.55

1.132. Пуля массы m , летящая горизонтально со скоростью v_0 , попадает в покоящийся на горизонтальном столе металлический шар массы M и радиуса R на расстоянии $R/2$ выше центра шара и ricoшетом отскакивает от него вертикально вверх (рис. 1.55). Спустя некоторое время движение шара по столу переходит в равномерное качение со скоростью v_1 . Определить скорость пули после удара по шару.

1.133. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы m , который может скользить по этой поверхности без трения (рис. 1.56). В одну из точек стержня ударяет шарик массы m , движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?

1.134. Однородный стержень длины L падает, скользя концом по абсолютно гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень покоился в вертикальном положении. Определить скорость центра тяжести в зависимости от его высоты h над полом.

1.135. Абсолютно твердая однородная балка веса P и длины L лежит на двух абсолютно твердых симметрично расположенных опорах, расстояние между которыми равно l (рис. 1.57). Одну из

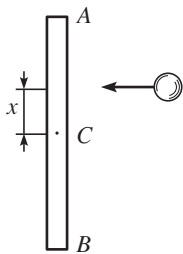


Рис. 1.56

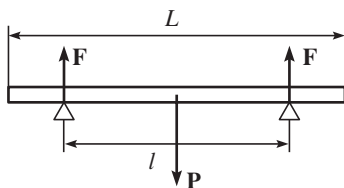


Рис. 1.57

опор выбивают. Найти начальное значение силы давления F , действующей на оставшуюся опору. Рассмотреть частный случай, когда $l = L$. Почему при выбивании опоры сила F меняется скачком?

1.136. Две одинаковые однородные пластинки, имеющие форму квадрата, подвешены с помощью тонких невесомых нитей двумя способами (рис. 1.58). Расстояние от точек подвеса до верхних сторон пластинок равно длине сторон. Найти отношение периодов малых колебаний получившихся физических маятников в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью пластинки.

1.137. Через неподвижный блок с моментом инерции I (рис. 1.59) и радиусом r перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массы m . Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если коэффициент упругости пружины равен k , а нить не может скользить по поверхности блока.

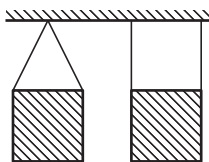


Рис. 1.58

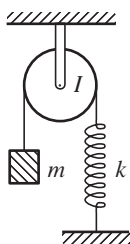


Рис. 1.59

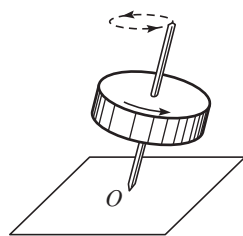


Рис. 1.60

1.138. Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (рис. 1.60), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

1.139. Гирскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется следующими параметрами: масса маховичка гироскопа $m = 5 \cdot 10^3$ г, момент инерции маховичка относительно оси фигуры $I_{\parallel} = 8 \cdot 10^4$ г·см², расстояние между точкой подвеса и центром масс маховичка $l = 10,25$ см. Гироскоп совершает 20 000 об./мин. Когда самолет, на котором был установлен прибор, двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $a = 1$ м/с². Определить угол α , на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

1.140. Определить максимальное гироскопическое давление быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины массой 3500 кг и

радиусом инерции 0,6 м делает 3000 об./мин. Расстояние между подшипниками равно 2 м.

1.141. Гирскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), способный вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 1.61). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпaeмый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна $r = 50$ см, а рабочая скорость 1 об./с.

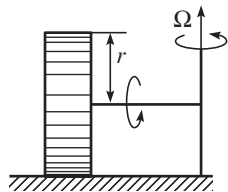


Рис. 1.61

1.142. Ротор гироскопа (диск радиуса $R = 1$ см, вращающийся с угловой скоростью $v = 30\,000$ об./мин) шарнирно закреплен в точке A . Центр масс ротора расположен на расстоянии $b = 2$ см от шарнира (рис. 1.62). Системе, находящейся в поле тяжести Земли, сообщают горизонтальное ускорение $a = 1$ м/с². Определить максимальное отклонение оси гироскопа от вертикали и время, через которое первый раз будет достигнуто это положение.

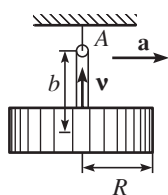


Рис. 1.62

8. Неинерциальные системы координат

В K' -системе отсчета, движущейся поступательно с ускорением $\mathbf{a}$ относительно какой-либо инерциальной системы, уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}.$$

Такое уравнение в K' -системе, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно неподвижной оси:

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{F} + m\omega^2 \mathbf{r} + 2m[\mathbf{v}'\omega].$$

1.143. Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой $\varphi = 30^\circ$, производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда $v_0 = 500$ м/с, угол вылета снаряда (т.е. угол наклона касательной в начальной точке траектории

к плоскости горизонта) $\alpha = 60^\circ$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приближенно отклонение y точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение — к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

1.144. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т.е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60^\circ$. Учítывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.145. Под каким углом α к вертикали надо выстрелить, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Использовать данные предыдущей задачи.

1.146. На полюсе установлена пушка, ствол которой направлен горизонтально вдоль меридиана и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через замок орудия. С какой угловой скоростью относительно Земли будет вращаться ствол пушки после выстрела? Считать, что в начальный момент времени снаряд находится на оси вращения и движется внутри ствола при выстреле с постоянным ускорением a . Масса пушки ($M = 1000$ кг) значительно больше массы снаряда ($m = 10$ кг). Длина ствола значительно больше его диаметра.

1.147. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

1.148. С какой скоростью v_0 должен идти человек по салону автобуса по направлению к кабине водителя, чтобы «взлететь» (потерять вес). Автобус преодолевает вершину холма (неровного участка дороги) с радиусом кривизны $R = 42$ м. Скорость автобуса $u = 72$ км/ч. Человек находится в центре автобуса.

1.149. На сколько будут отличаться конечные скорости разбега самолета, если он взлетает на экваторе, причем один раз его разбег производится с запада на восток, а второй раз — с востока на запад? Подъемная сила, действующая на крылья самолета, пропорциональна квадрату его скорости относительно Земли. Необходимая конечная скорость разбега самолета вдоль меридиана равна v_0 .

1.150. В центре неподвижной карусели находится человек. Он переходит с постоянной скоростью к краю карусели, двигаясь при этом с востока на запад. Считая карусель однородным диском, определить, при каком соотношении масс человека и карусели m/M последняя приобретет угловую скорость, равную четверти угловой скорости

суточного вращения Земли. Считать, что карусель находится на широте $\varphi = 30^\circ$, трением в подшипниках карусели пренебречь.

1.151. Заводской кран стоит на рельсах. Стрела крана, составляющая с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$, находится в плоскости, перпендикулярной к рельсам. Оставаясь в этой плоскости, стрела поворачивается на угол 2α . Какую скорость V приобретет при этом кран? Масса крана со стрелой $M = 73$ т, масса стрелы $m = 20$ т, центр масс стрелы отстоит на расстояние $l = 5$ м от ее основания. Рельсы направлены по меридиану, географическая широта $\varphi = 60^\circ$. Трением качения и трением в осях колес крана пренебречь.

1.152. На горизонтально расположенный стержень надета небольшая муфта, которая может перемещаться вдоль стержня. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω (рис. 1.63). В начальный момент времени муфта находится на расстоянии r_0 от оси вращения и имеет скорость v_0 , направленную от оси вращения. Далее оказалось, что скорость муфты v относительно стержня растет линейно с удалением от оси вращения $v = v_0 r / r_0$. При каком коэффициенте трения k между муфтой и стержнем возможно такое движение? Силой тяжести пренебречь.

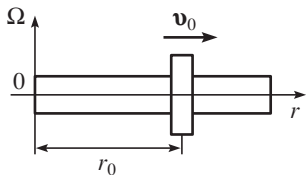


Рис. 1.63

1.153. Оценить максимальную скорость, которую можно сообщить небольшому предмету в кабине спутника, вращающегося вокруг Земли с периодом 1,5 ч, чтобы этот предмет в своем движении на протяжении нескольких часов ни разу не стукнулся о стенки. Каков характер траектории его движения, если направление толчка лежит в плоскости орбиты? Диаметр кабины спутника равен 3 м.

9. Упругие деформации и элементы гидродинамики

1. Закон Гука

$$\varepsilon = \sigma / E, \quad \gamma = \tau / G;$$

здесь ε — относительное удлинение, σ — напряжение, E — модуль Юнга, γ — относительный сдвиг, τ — тангенциальное напряжение, G — модуль сдвига.

2. Коэффициент Пуассона

$$\mu = -\varepsilon' / \varepsilon,$$

где ε' — относительное поперечное сжатие (растяжение), возникающее при продольном растяжении (сжатии) ε .

3. Коэффициент сжимаемости (всестороннего сжатия):

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}.$$

4. Связь между упругими константами:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

5. Объемная плотность энергии упругих деформаций

$$u_\varepsilon = E\varepsilon^2/2, \quad u_\tau = G\tau^2/2.$$

6. Уравнение Бернулли вдоль линии тока, в стационарном потоке идеальной жидкости

$$p/\rho + \varphi + v^2/2 = \text{const},$$

где p — давление, ρ — плотность, φ — гравитационный потенциал.

7. Объем жидкости, протекающей в единицу времени по цилиндрической трубе длины l и радиуса r (формула Пуазейля):

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l},$$

где η — коэффициент вязкости жидкости, Δp — разность давлений на концах трубы.

8. Сила сопротивления движению шарика радиуса r в вязкой жидкости (формула Стокса):

$$F = 6\pi\eta r v.$$

9. Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \rho v l / \eta,$$

где l — некоторый характерный размер.

1.154. На сколько вытягивается стержень из железа, подвешенный за один конец, под влиянием собственного веса? На сколько при этом меняется его объем?

1.155. Стержень поперечного сечения S растягивается силой $\mathbf{F}$, параллельной его оси. Под каким углом α к оси наклонено сечение, в котором тангенциальное напряжение τ максимально? Найти это напряжение.

1.156. Резиновый цилиндр высотой h , весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на его верхнее основание поставить второй такой же цилиндр?

1.157. Определить отношение энергий деформаций стального и пластмассового цилиндров, поставленных рядом друг с другом и сжатых между параллельными плоскостями, если до деформации они имели одинаковые размеры. Модуль Юнга для стали — $2 \cdot 10^5$ Н/мм², для пластмассы — 10^2 Н/мм². Определить это же

отношение для случая, когда цилиндры поставлены друг на друга и сжаты такими же плоскостями.

1.158. Стальная линейка длины $L = 30$ см и толщины $d = 1$ мм свернута в замкнутое кольцо. Найти распределение и максимальную величину напряжений в линейке. Модуль Юнга для стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

1.159. Однородный круглый резиновый жгут длины l и диаметра D помещен в стальную трубку с закрытым концом того же диаметра (рис. 1.64). На конец жгута со стороны открытого конца трубки начинает действовать сила F , равномерно распределенная по всему сечению жгута. На сколько уменьшится при этом длина жгута? Упругие свойства резины считать известными.

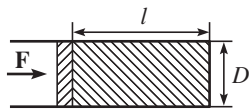


Рис. 1.64

1.160. Определить максимальное давление, которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда $\rho = 0,917$ г/см³, модуль Юнга $E = 2,8 \cdot 10^{11}$ дин/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

1.161. Медная пластинка запаяна между такими же по площади, но вдвое более тонкими стальными пластинками. Найти эффективный температурный коэффициент расширения такой системы в длину, если известны температурные коэффициенты линейного расширения меди $\alpha_m = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ и стали $\alpha_{ст} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, а модуль Юнга стали вдвое выше, чем у меди, и равен $2 \cdot 10^{12}$ дин/см².

1.162. Кабина лифта массы $m = 1000$ кг равномерно опускается со скоростью $v_0 = 1$ м/с. Когда лифт опустился на расстояние $l = 10$ м, барабан заклинило. Вычислить максимальную силу, действующую на трос из-за внезапной остановки лифта, если площадь поперечного сечения троса $S = 20$ см², а модуль Юнга троса $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² (l — длина недеформированного троса). Изменением сечения троса пренебречь.

1.163. В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня H (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна S . Определить время t , за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты h (относительно дна сосуда), если в дне сосуда сделано малое отверстие площади σ . Определить также время T , за которое из сосуда выльется вся жидкость.

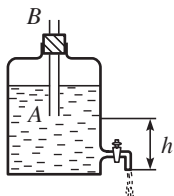


Рис. 1.65

1.164. Для того, чтобы струя жидкости вытекала из сосуда с постоянной скоростью, применяют устройство, изображенное на рис. 1.65. Определить скорость истечения струи v в этом случае.

1.165. Цилиндрический сосуд высоты h погружен в воду на глубину h_0 . В дне сосуда площади S появилось маленькое отверстие площади σ . Определить время τ , через которое сосуд утонет.

1.166. Цилиндрический сосуд радиуса R с налитой в него идеальной несжимаемой жидкостью вращается вокруг своей геометрической оси, направленной вертикально, с угловой скоростью ω . Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости (относительно сосуда).

1.167. Проволоку радиуса $r_1 = 1$ мм протягивают с постоянной скоростью $v_0 = 10$ см/с вдоль оси трубки радиуса $r_2 = 1$ см, которая заполнена жидкостью вязкости $\eta = 0,01$ П. Определить силу трения f , приходящуюся на единицу длины проволоки. Найти распределение скоростей жидкости вдоль радиуса трубки.

1.168. Длинный вертикальный капилляр длины L и радиуса R заполнен жидкостью плотности ρ , коэффициент вязкости которой равен η . За какое время τ вся жидкость вытечет из капилляра под действием силы тяжести? Влиянием сил поверхностного натяжения пренебречь. Процесс установления скорости жидкости считать мгновенным.

1.169. В дне сосуда с жидким гелием образовалась щель шириной $\delta = 10^{-4}$ см и длиной $l = 5$ см. Толщина дна сосуда $d = 0,5$ мм. Найти максимальную скорость гелия в щели $v_{\max}$ и полный расход жидкости dM/dt , если высота столба гелия над дном сосуда $h = 20$ см. Плотность и вязкость гелия равны $\rho = 0,15$ г/см³, $\eta = 3,2 \cdot 10^{-5}$ г/(см · с). (Расходом называется масса жидкости, протекающая через щель в течение одной секунды.)

10. Элементы релятивистской механики

1. Преобразования Лоренца. Если система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью V в направлении оси x , оси x и x' совпадают, а оси y' и z' соответственно параллельны осям y и z , то координаты и время в системе K' связаны с координатами и временем в системе K соотношениями

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

2. Преобразование скорости:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - v_x V/c^2}.$$

3. Лоренцево сокращение длины и замедление хода движущихся часов

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

где l_0 — собственная длина, а Δt_0 — собственное время движущихся часов.

4. Релятивистские энергия и импульс

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + (mc^2)^2.$$

5. Инвариантный интервал

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = \text{inv},$$

где Δt — промежуток времени между двумя событиями, Δl — расстояние между точками, где эти события произошли.

Для изолированной системы тел инвариантной является также величина

$$E^2 - P^2 c^2 = M^2 c^4,$$

где E , P и M — полная энергия, импульс и масса этой системы тел соответственно.

1.170. Две линейки, собственная длина каждой из которых равна l_0 , движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x с релятивистскими скоростями. Наблюдатель, связанный с одной из них, зафиксировал, что между совпадениями левых и правых концов линеек прошло время τ . Какова относительная скорость линеек?

1.171. Межзвездный корабль движется к ближайшей звезде, находящейся на расстоянии $L = 4,3$ световых года, со скоростью $v = 1000$ км/с. Достигнув звезды, корабль возвращается обратно. На какое время Δt часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю?

Примечание. Ввиду большой скорости корабля движение звезды относительно Солнца можно не учитывать.

1.172. Космический корабль летит со скоростью $v = 0,6c$ от одного космического маяка к другому. В тот момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за 2 месяца.

1.173. Световой сигнал, посылаемый на Землю с планеты Саракш, возвращается на Саракш через время $2T = 30$ лет. Скорость планеты относительно Земли пренебрежимо мала, а ее календарь согласован с земным. Звездолет летит по направлению к Солнечной системе со скоростью $v = 0,6c$. В день, когда он пролетает мимо Саракша, на звездолете рождается мальчик Ваня. В тот же день (по саракшско-земному календарю) на Земле рождается мальчик Петя. Сколько лет будет Ване и Пете, когда звездолет будет пролетать мимо Земли?

1.174. Прогрессор Комов (герой Стругацких) совершает межзвездное путешествие на звездолете. В день, когда ему исполнилось 30 лет и звездолет находился вблизи планеты Пандора, он послал на Землю световой сигнал. Сигнал приняли на Земле через 12,5 лет. Когда Комову исполнилось 45 лет, и звездолет вновь оказался вблизи

планеты Пандора, прогрессор принял отраженный от Земли сигнал. Вычислить скорость звездолета V_0 . Часы звездолета и Земли в момент посылки сигнала синхронизованы. Скоростью Земли относительно планеты Пандора можно пренебречь.

1.175. Два космических корабля 1 и 2 направляются к Земле (рис. 1.66), двигаясь вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями.

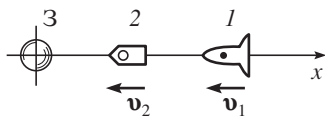


Рис. 1.66

В некоторый момент времени каждый корабль и Земля посылают друг другу короткие световые сигналы (корабль 1 посылает сигнал на корабль 2 и на Землю, корабль 2 — на корабль 1 и на Землю, и Земля — на корабли 1 и 2). Известно, что все сигналы посылаются одновременно в системе отсчета,

связанной с Землей. Оказалось, что промежуток времени между принятыми сигналами по бортовым часам корабля 1 составил $\tau_1 = 1$ с, а по бортовым часам второго корабля — $\tau_2 = 0$. Какое время между принятыми сигналами τ_3 будет зарегистрировано на Земле?

1.176. Можно ли с помощью фотоаппарата зафиксировать сокращение Лоренца по изменению формы предмета, пролетающего мимо точки фотографирования с релятивистской скоростью? Рассмотреть случай куба и шара, летящих на большом расстоянии от точки фотографирования.

1.177. Найти скорость частицы (заряд e , масса m), прошедшей разность потенциалов V без начальной скорости. Найти предельные выражения для скорости: 1) для классического случая ($v \ll c$); 2) для ультрарелятивистского ($v \approx c$).

1.178. Выразить релятивистский импульс частицы, масса которой равна m , через ее релятивистскую кинетическую энергию.

1.179. С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $v = 0,6$ с, ведется прямая телевизионная передача позволяющая видеть на экране телевизора циферблат корабельных часов. Сколько оборотов сделает на экране секундная стрелка за 1 мин по земным часам?

1.180. При столкновении протонов высоких энергий могут образовываться антипротоны $\bar{p}$ согласно реакции $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Какой минимальной (пороговой) кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с покоящимся протоном была возможна такая реакция?

1.181. За распадом остановившегося в ядерной фотоэмульсии K^+ -мезона по схеме: $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ последовал распад π^0 -мезона по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$, причем вершина пары e^+e^- находилась на расстоянии $l = 0,1$ мкм от места остановки K^+ -мезона. Оценить время τ_0 жизни π^0 -мезона, если известно, что энергия покоя K^+ -мезона $M_K c^2 = 494$ МэВ, энергия покоя π^+ -мезона $M_{\pi^+} c^2 = 140$ МэВ и энергия покоя π^0 -мезона $M_{\pi^0} c^2 = 135$ МэВ.

Г л а в а II

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

1. Электрическое поле в вакууме

1. Закон Кулона

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}.$$

2. Теорема Гаусса

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}.$$

3. Теорема Гаусса в локальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

4. Электрическое поле точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

5. Электрическое поле заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

6. Электрическое поле диполя

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\mathbf{p}\mathbf{R}}{R^4} \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right) = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{R})\mathbf{R} - R^2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^5},$$

где

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i.$$

7. Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

8. Связь между полем и потенциалом

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

9. Уравнение Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

2.1. На двух одинаковых каплях воды находится по одному лишнему электрону ($e = -1,6 \cdot 10^{19}$ Кл). Сила кулоновского отталкивания капель уравнивает силу их взаимного тяготения. Каковы их радиусы?

2.2. Имеются два точечных заряженных тела с зарядами $-q$ и $+Q$ и массами m и M , соответственно. На каком расстоянии d друг от друга должны быть расположены заряды, чтобы во внешнем однородном электрическом поле E , направленном вдоль прямой, проходящей через заряды, они ускорялись как единое целое, т.е. не изменяя взаимного расположения?

2.3. Электрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по величине точечных зарядов q , расположенных в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 2.1. Найти электрическое поле такого квадруполя в точке A , находящейся на расстоянии $r \gg a$ от его центра O , если линия OA параллельна одной из сторон квадрата.

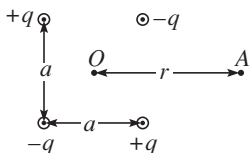


Рис. 2.1

2.4. Найти силу взаимодействия двух точечных диполей, если их дипольные моменты $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно d .

2.5. Представить в векторной форме электрическое поле внутри однородно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ в зависимости от радиуса r .

2.6. Найти электрическое поле E в шаровой полости внутри однородно заряженного шара (рис. 2.2). Объемная плотность заряда равна ρ . Расстояние между центром полости и центром шара равно l .

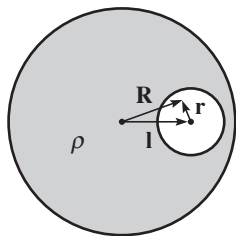


Рис. 2.2

2.7. С какой скоростью достигают анода электронной лампы электроны, испускаемые катодом, если напряжение между анодом и катодом равно 200 В?

2.8. На шарик радиуса $R = 10$ см, располагающийся уединенно в атмосфере, падает пучок электронов. Какой заряд можно накопить таким способом на шарике, если электрическая прочность воздуха при нормальных условиях равна $3 \cdot 10^6$ В/м?

2.9. Точечный заряд q располагается на расстоянии a от заземленной плоской металлической поверхности с характерным размером $b \gg a$. Определить характер и силу взаимодействия заряда с поверхностью.

2.10. На расстоянии r от центра изолированного металлического незаряженного шара помещен точечный заряд q . Определить потенциал шара.

2.11. Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра незаряженного проводящего шара радиуса r . Какой заряд протечет по проводнику, если заземлить шар?

2.12. В пространстве между пластинами плоского конденсатора имеется свободный поток электронов, который создает равномерный объемный заряд. Расстояние между пластинами равно d , потенциал одной из пластин равен φ . При каком значении объемной плотности заряда ρ потенциал и напряженность поля у другой пластины равны нулю?

2.13. Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром радиуса R (рис. 2.3). Заряд находится на расстоянии d от центра шара. Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен; 2) шар изолирован, и его полный заряд равен нулю.

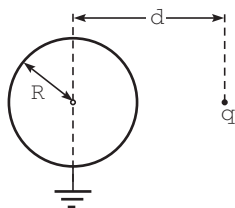


Рис. 2.3

2.14. Заземленный металлический шар радиуса R лежит на тонком равномерно заряженном диске того же радиуса. Найти заряд шара, если заряд диска равен Q .

2.15. Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E_{\max} = 30$ кВ/см, диаметр проводов $d = 1$ см, а расстояние между проводами $b = 1$ м.

2. Электрическое поле в веществе. Электроемкость

1. Соотношение между поляризацией и полем в веществе

$$\mathbf{P} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \beta \varepsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{в случае линейной связи}) \mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \beta) \mathbf{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

2. Теорема Гаусса

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum_i q_i \Rightarrow (\text{в случае линейной связи}) \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

3. Закон Кулона

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{12}}.$$

4. Емкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

5. Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$

6. Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

7. Плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}.$$

8. Энергия системы зарядов

$$W = \sum_{i \neq k} \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}}.$$

2.16. Два шара, один диаметром $d_1 = 10$ см с зарядом $q_1 = 6 \cdot 10^{-10}$ Кл, другой — $d_2 = 30$ см и $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ Кл, соединяются тонкой проволокой. Какой заряд переместится по ней?

2.17. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику ЭДС. Внутрь одного из них вносят диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , заполняющий все пространство между обкладками. Как и во сколько раз изменится напряженность электрического поля в этом конденсаторе?

2.18. Импульсную стыковую сварку медной проволоки осуществляют посредством разряда конденсатора емкостью $C = 1000$ мкФ при напряжении на обкладках $V = 1500$ В. Какова полезная мощность разряда, если его длительность $\tau = 2$ мкс и КПД установки $\eta = 0,04$?

2.19. Найти емкость сферического проводника радиуса r , окруженного концентрическим слоем диэлектрика с внешним радиусом R и диэлектрической проницаемостью ϵ .

2.20. Определить электрическую энергию ядра урана ${}_{235}^{92}\text{U}$ при равномерном распределении заряда $Z = 92$ по объему сферы радиуса $R = 1,3 \cdot 10^{-15} A^{1/3}$ м, где $A = 235$ — массовое число.

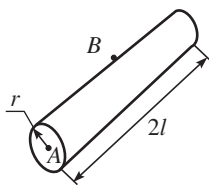


Рис. 2.4

2.21. Как изменится энергия заряженного конденсатора с вакуумным зазором, если заполнить последний жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ ?

2.22. Имеется длинный тонкий диэлектрический цилиндр длиной $2l$ и радиусом r с «замороженной» поляризованностью $\mathbf{P}$. Найти напряженность поля в точке A (рис. 2.4). Во сколько раз это поле сильнее, чем в точке B ?

2.23. По сфере радиуса R распределен равномерно заряд Q . Определить давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

2.24. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 2.5). Все пластины имеют форму полукруга радиуса R , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы в сравнении с d . Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил M , действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε .

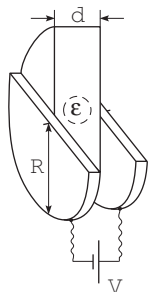


Рис. 2.5

2.25. С какой поверхностной плотностью $\sigma\theta$ следует распределить электрический заряд по поверхности сферы радиуса R , чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0 ? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

2.26. На сколько отличается от единицы диэлектрическая проницаемость «идеального газа», состоящего из большого числа проводящих шариков радиуса r ? Концентрация n шариков мала, так что $nr^3 \ll 1$.

2.27. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется от значения ε_1 у одной пластины до значения $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ у другой. Расстояние между пластинами d , площадь каждой из них равна S . Найти емкость конденсатора.

2.28. Три проводящих шара с радиусами $R_1 = 10$ см, $R_2 = 20$ см и $R_3 = 30$ см и, соответственно, потенциалами $\varphi_1 = 450$ В, $\varphi_2 = 300$ В и $\varphi_3 = 150$ В в вакууме разведены далеко друг от друга. Какое количество тепла Q выделится после того, как их соединят тонкими проволочками, емкостью которых можно пренебречь?

2.29. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Разность потенциалов между обкладками $U = 300$ В, расстояние между ними $d = 1$ см. В диэлектрике имеются два воздушных пузырька радиуса $r = 1$ мм, расстояние между ними $l = 1$ см, и они расположены в плоскости, параллельной обкладкам. Оценить величину и направление силы электростатического взаимодействия между пузырьками.

2.30. Пластина пьезоэлектрика толщины $2d$ вследствие неоднородной деформации поляризована так, что поляризация ее в центре равна P_0 , направлена вдоль оси x и изменяется по закону $P = P_0(1 - x^2/d^2)$, где x отсчитывается от плоскости симметрии пластины. Определить напряженность электрического поля внутри и вне пластины, а также разность потенциалов U между ее поверхностями.

3. Постоянный ток. Электрические цепи

1. Сопротивление участка цепи

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{l}{\lambda S}.$$

2. Электродвижущая сила, включенная в цепь:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

3. Закон Ома, интегральная форма:

$$U = IR; \quad \mathcal{E} = I(R + r_{\text{внутр}}).$$

4. Закон Ома, локальная форма:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho}.$$

5. Джоулево тепловыделение, интегральная форма:

$$\dot{Q} = RI^2.$$

6. Джоулево тепловыделение, локальная форма:

$$\dot{q} = \mathbf{jE} = \rho j^2.$$

7. Закон Кирхгофа для произвольного узла в квазистационарной электрической цепи

$$\sum_k I_k = 0.$$

8. Закон Кирхгофа для произвольного контура в квазистационарной электрической цепи

$$\sum_k R_k I_k = \sum_k \mathcal{E}_k.$$

2.31. Определить сопротивление R_{AB} цепочки, изображенной на рис. 2.6.

2.32. Два гальванических элемента ЭДС и внутренние сопротивления которых равны, соответственно, $\mathcal{E}_1, r_1$ и $\mathcal{E}_2, r_2$, соединены параллельно и нагружены на сопротивление R (рис. 2.7). Определить падение напряжения на сопротивлении R .

2.33. Металлический сплошной цилиндр вращается вокруг своей оси, делая $n = 20$ об./с. Определить напряженность электрического поля, возникающего внутри него, как функцию радиуса, и разность потенциалов между осью и периферией, если диаметр цилиндра $D = 5$ см.

2.34. Имеется ли вблизи поверхности проводника, по которому течет постоянный ток, электрическое поле?

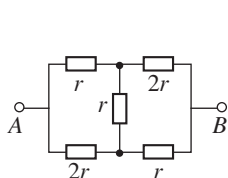


Рис. 2.6

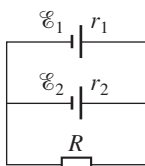


Рис. 2.7

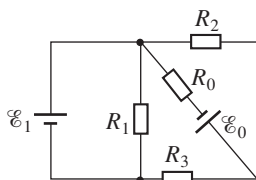


Рис. 2.8

2.35. Имеется ли на проводнике, по которому течет постоянный ток, нескомпенсированный электрический заряд?

2.36. Найти ток, проходящий через резистор R_0 в схеме, представленной на рис. 2.8, считая все параметры заданными.

2.37. Сопротивления R_1 и R_2 в схеме рис. 2.9 подобраны так, чтобы ток через гальванометр был равен нулю. Считая известными $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, найти $\mathcal{E}$ при условии, что внутренними сопротивлениями батареи можно пренебречь в сравнении с R_1 и R_2 .

2.38. В схеме, изображенной на рис. 2.10, заданы сопротивления R_1 и R_2 . Определить сопротивление R , при котором рассеиваемая на нем мощность максимальна. Каково условие того, что ток, проходящий через это сопротивление, равен нулю?

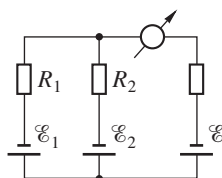


Рис. 2.9

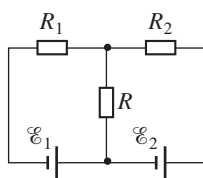


Рис. 2.10

2.39. Два проводника имеют при 0°C сопротивления R_{01} и R_{02} и, соответственно, температурные коэффициенты сопротивления α_1 и α_2 . Определить эффективный температурный коэффициент сопротивления при а) последовательном и б) параллельном соединении этих проводников.

2.40. Показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей все пространство между двумя идеальными проводниками произвольной формы, равно $\rho\epsilon_0/C$, где ρ — удельное сопротивление среды, а C — взаимная емкость этой системы электродов в вакууме.

2.41. Имеется n идеально проводящих тел в вакууме с зарядами $q_1, q_2, \dots, q_n$ и потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Какое количество тепла будет выделяться в единицу времени, если пространство между этими телами заполнить однородной жидкостью с проводимостью λ и диэлектрической проницаемостью ϵ , а потенциалы тел поддерживать при прежних значениях?

2.42. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком (рис. 2.11), обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость изменяются от ε_1, λ_1 у одной пластины до ε_2, λ_2 у другой пластины. Конденсатор включен в цепь с постоянной ЭДС. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q , сосредоточенного в объеме диэлектрика, когда в цепи установится постоянный электрический ток I , текущий через диэлектрик по направлению от пластины 1 к пластине 2.

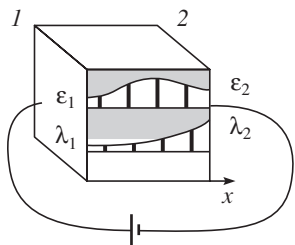


Рис. 2.11

2.43. По цилиндрическому стержню течет ток плотности j . Проводимость λ на участке длины l изменяется по линейному закону от λ_1 до λ_2 . Найти объемную плотность свободных зарядов ρ на этом участке цепи.

2.44. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами d_1 и d_2 , а их диэлектрическая проницаемость и проводимость равны, соответственно, ε_1, λ_1 и ε_2, λ_2 . Найти плотность поверхностных свободных зарядов σ , которая устанавливается на границе между диэлектриками при наложении на конденсатор постоянного напряжения V .

2.45. Заземление концов телеграфной линии осуществлено посредством металлических шаров радиуса r_1 и r_2 , соответственно (рис. 2.12). Удельная проводимость грунта вблизи них равна λ_1 и λ_2 . Найти сопротивление R земли между шарами. Считать почву в окрестности каждого из них однородной на расстояниях, больших по сравнению с радиусами шаров.

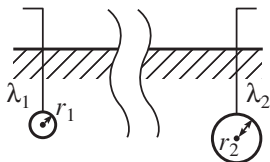


Рис. 2.12

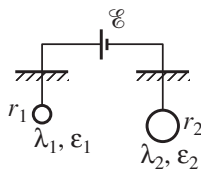


Рис. 2.13

2.46. Цепь постоянного тока состоит из длинной однопроводной линии, в которую включен источник ЭДС. Линия замыкается через Землю, в которую зарыты два металлических шара на большом расстоянии друг от друга (рис. 2.13). Известны радиусы шаров r_1 и r_2 , а также проводимость и диэлектрическая проницаемость грунта в местах, где они закопаны — соответственно, λ_1, ε_1 и λ_2, ε_2 . Пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления заземления, определить заряд каждого шара.

2.47. К большому металлическому листу толщины a приварены на расстоянии b друг от друга два цилиндрических проводника радиуса r_0 (рис. 2.14). Оценить сопротивление R между проводниками, полагая $a \ll r_0 \ll b$. Считать, что проводимость λ_1 проводников много больше проводимости λ материала листа.

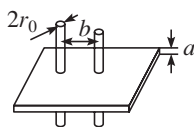


Рис. 2.14

2.48. Две плоские прямоугольные пластины образуют конденсатор (рис. 2.15). Между ними без трения может двигаться диэлектрическая пластина, толщина которой совпадает с зазором между обкладками h , а ширина равна b (на рисунке не показана). Известны также ЭДС источника и диэлектрическая проницаемость материала пластины ϵ . Какую мощность затрачивает батарея в момент, когда втягивание диэлектрика в конденсатор происходит с мгновенной скоростью v ? Как распределяется эта мощность между механической и электрической энергией?

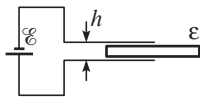


Рис. 2.15

4. Магнитное поле тока

1. Теорема Гаусса:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

2. Соотношение между индукцией и напряженностью поля в вакууме:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{где} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

3. Закон Био и Савара:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi r^3} [I d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

4. Теорема о циркуляции:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

5. Закон Ампера для тонкого провода в магнитном поле:

$$d\mathbf{F} = [I d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

6. Закон Ампера в локальной форме:

$$\mathbf{f} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dV} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}].$$

7. Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

8. Циклотронная частота

$$\omega_B = \frac{eB}{m}.$$

9. Поле прямого провода

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

10. Поле в центре кольца с током

$$H = \frac{I}{2R}.$$

11. Поле внутри длинного соленоида с плотностью намотки n

$$H = nI = \frac{N}{l}I; \quad B = \mu_0 nI.$$

12. Определение магнитного момента:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \langle [\mathbf{r}_{\alpha}, q_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}] \rangle.$$

13. Магнитный момент витка с током

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}, \quad \text{где } \mathbf{n} \text{ — вектор нормали.}$$

14. Поле магнитного диполя

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{3(\mathbf{mR})\mathbf{R} - R^2\mathbf{m}}{4\pi R^5}.$$

15. Сила, действующая на диполь во внешнем поле:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{mB}).$$

16. Момент силы, действующий на диполь во внешнем поле:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{mB}].$$

17. Потенциальная энергия диполя во внешнем поле

$$W = -(\mathbf{mB}).$$

2.49. Из куска изолированной проволоки сделан круглый виток радиуса R и подключен к источнику тока с постоянной ЭДС. Как изменится напряженность магнитного поля в центре окружности, если из того же куска проволоки сделать два прилегающих друг к другу витка радиуса $R/2$?

2.50. По двум одинаковым металлическим обручам радиуса R , один из которых расположен горизонтально, а другой — вертикально, идут одинаковые токи I . Найти величину и направление индукции $\mathbf{B}$ в их общем центре.

2.51. Между полюсами электромагнита в горизонтальном магнитном поле находится прямолинейный проводник, расположенный

горизонтально и перпендикулярно к магнитному полю. Какой ток должен идти через проводник, чтобы уничтожить натяжения в поддерживающих его гибких проводах? Индукция поля $0,01$ Тл, масса единицы длины проводника $0,01$ кг/м.

2.52. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно к силовым линиям. По какому закону он будет двигаться в дальнейшем?

2.53. Электроны, летящие в телевизионной трубке, обладают энергией 12 кэВ. Трубка ориентирована так, что движение электронов происходит с юга на север. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли направлена вниз и равна $5,5 \cdot 10^{-5}$ Тл. В каком направлении и на сколько отклонится луч на пути 20 см?

2.54. Определить траекторию движения произвольной заряженной частицы в скрещенных полях $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$; напряженности поля E и H известны; $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$; $\varepsilon_0 E^2 \ll \mu_0 H^2$.

2.55. Вдоль стенки цилиндрической трубы идет постоянный ток I . Какова напряженность магнитного поля H внутри и вне трубы?

2.56. По длинному цилиндрическому соленоиду с плотной намоткой (N витков на единицу длины) протекает постоянный ток I . Определить величину и направление магнитного поля внутри и вне соленоида вдали от его торцов.

2.57. Электрический ток I протекает по проводу, изогнутому так, как показано на рис. 2.16. Найти значение магнитной индукции в центре окружности (радиус окружности R).

2.58. Найти напряженность магнитного поля в центре плоского прямоугольного контура со сторонами a и b , обтекаемого током I .

2.59. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода параллельно этой поверхности на расстоянии h от нее подвешен тонкий прямолинейный провод, по которому течет ток I . Найти линейную плотность сверхпроводящего тока i , протекающего по поверхности сверхпроводника.

Указание. Применить метод зеркальных изображений.

2.60. По прямолинейному цилиндрическому проводнику радиуса R протекает ток I , равномерно распределенный по сечению проводника. Найти напряженность магнитного поля внутри и вне проводника в зависимости от расстояния r от оси.

2.61. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам A и B , выполненным из немагнитного материала и ограниченными пересекающимися цилиндрическими поверхностями, текут в противоположных направлениях токи одинаковой плотности j (рис. 2.17). Найти величину и направление магнитного поля в полости Π .

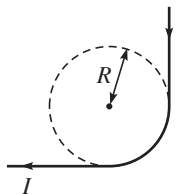


Рис. 2.16

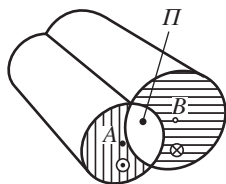


Рис. 2.17

2.62. Определить силу притяжения, приходящуюся на единицу длины каждого из двух тонких параллельных прямых проводов, если ток в них $I_1 = I_2 = 1$ А, а расстояние между проводами $x = 1$ м.

2.63. На тонкий латунный прут, свернутый в кольцо, намотано равномерно $N = 10^4$ витков провода. Во сколько раз магнитная индукция B_0 на оси прута больше, чем B_c в центре кольца?

2.64. Равномерно заряженный тонкий диск радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг своего неподвижного диаметра. Полный заряд диска Q . Определить магнитный момент вращающегося диска.

2.65. Равномерно заряженный шарик радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг своего неподвижного диаметра. Заряд шарика Q равномерно распределен по объему. Найти магнитное поле шарика на расстояниях $r \gg R$.

2.66. В результате некоторого космического события образовалась система, состоящая из звезды (масса M_0 , магнитный момент $\mathbf{m}_0$) и планеты (масса $M \ll M_0$, магнитный момент $\mathbf{m}$). Планета движется по круговой орбите радиуса R . Найти возможный разброс величины периода обращения в зависимости от ориентации магнитных моментов, считая плоскость орбиты перпендикулярной $\mathbf{m}_0$.

5. Электромагнитная индукция

1. Коэффициент самоиндукции (индуктивность):

$$L = \Phi / I,$$

где I — ток, протекающий в контуре, а $\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ — магнитный поток через контур, создаваемый этим током.

2. Энергия магнитного поля, создаваемого током через контур:

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

(В случае нелинейной связи между током и потоком Φ именно эта формула часто используется как определение индуктивности.)

3. Коэффициент взаимной индукции определяется соотношениями

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \quad \Phi_{21} = L_{21} I_2, \quad L_{12} = L_{21} = M.$$

4. Закон Фарадея:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где $\mathcal{E}$ — ЭДС в контуре, а Φ — магнитный поток через контур.

5. Закон Фарадея в локальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

2.67. Коаксиальная линия состоит из двух соосных цилиндрических проводников. Ток течет по внутреннему проводнику радиуса r_1 и возвращается по внешнему цилиндрическому проводнику радиуса r_2 . Определить индуктивность на единицу длины такой линии. Внутренний проводник, как и внешний, считать полым и тонким в сравнении с масштабами r_1, r_2 .

2.68. Имеется длинный соленоид с плотной намоткой и с магнитомягким сердечником; радиус соленоида R , длина l , полное число витков N , магнитная проницаемость сердечника μ . Найти индуктивность соленоида.

2.69. Один и тот же ток идет по двум параллельным проводам в противоположных направлениях. Провода имеют круглые сечения радиуса $r = 2$ мм, а расстояние между ними $d = 2$ см. Найти индуктивность единицы длины такой системы, учитывая поле только вне проводов.

2.70. На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности их равны, соответственно, $L_1 = 0,5$ Гн и $L_2 = 0,7$ Гн. Чему равна их взаимная индуктивность в отсутствие рассеяния магнитного потока?

2.71. Внутри длинного соленоида с плотностью намотки n , вдали от его концов, расположен параллельно оси намагниченный стержень с магнитным моментом m_μ . Найти магнитный поток Φ , пронизывающий соленоид.

2.72. В плоскости xy расположен круглый виток радиуса R_0 , по которому течет ток I . Найти поток магнитной индукции через заштрихованную часть плоскости xy , если $R = 10R_0$ (рис. 2.18).

2.73. Определить коэффициент самоиндукции коаксиала, образованного соосно расположенным железным стержнем ($\mu \simeq 1000$) и медной трубкой ($\mu \simeq 1$), замкнутыми на одном конце проводящим диском. Длина стержня и трубки $\Lambda = 10$ см, диаметр стержня $2r_1 = 2$ мм, внутренний диаметр трубки $2r_2 = 9$ мм, наружный — $2r_3 = 10$ мм. Считать, что в стержне и трубке токи равномерно распределяются по сечениям.

2.74. Нагрузкой мощного импульсного генератора служит легкая проводящая оболочка — «лайнер» (на рис. 2.19 показан пунктиром).

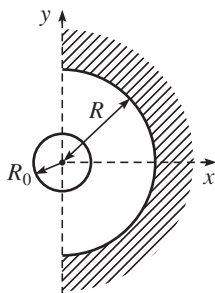


Рис. 2.18

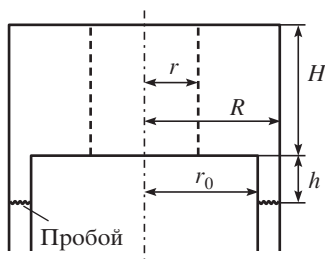


Рис. 2.19

Вся система токопроводов аксиально симметрична и может считаться идеально проводящей. Вскоре после срабатывания генератора в подводящем коаксиале происходит пробой, шунтирующий выходной узел. Как изменится ток в лайнере, когда последний сожмется под действием силы Ампера в 10 раз? $R = 5$ см, $H = 2$ см, $h = 1$ см, $r_0 = 4$ см, $r = 2$ см.

2.75. Прямоугольная рамка $a \times b$ лежит в одной плоскости с прямым проводником, по которому течет ток I , и который расположен параллельно стороне b , на расстоянии $d > a$ от ближайшей стороны (рис. 2.20). Какой заряд Q пройдет через сечение провода рамки, если она повернется вокруг ближайшей к проводу стороны b на угол π и останется в этом положении? Сечение провода рамки S , удельное сопротивление ρ . Самоиндукцией рамки пренебречь.

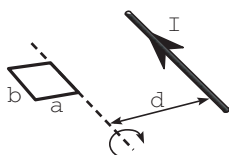


Рис. 2.20

2.76. Металлическое кольцо радиуса r и массы M падает в магнитном поле, у которого вертикальная составляющая индукции зависит

от высоты h по закону $B(h) = B_0(1 - ah)$, где a — некоторая константа. Плоскость кольца при падении горизонтальна, омическое сопротивление кольца равно R . Пренебрегая индуктивностью кольца, найти зависимость скорости его падения от времени.

2.77. Соленоид длины l с числом витков N и сечением S подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ через некоторое сопротивление R . В соленоид вставлен сердечник из сверхпроводника той же длины, но с сечением $S/2$. Сердечник быстро вынимают из соленоида. Определить ток в цепи в зависимости от времени.

2.78. Разборный трансформатор включен в сеть, причем ко вторичной обмотке подключена нагрузка. Как изменится ток в обмотках при удалении части разборного сердечника?

2.79. Оценить коэффициент взаимной индукции $\mathcal{M}$ обмоток трансформатора, считая число витков и магнитную проницаемость сердечника известными, а сам сердечник — замкнутым и односвязным, с периметром l и площадью поперечного сечения S .

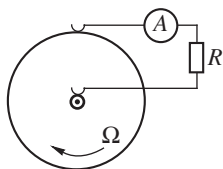


Рис. 2.21

2.80. Медный диск радиуса 10 см вращается в однородном магнитном поле, делая 100 оборотов в секунду (рис. 2.21). Индукция магнитного поля, перпендикулярного к плоскости диска, равна 1 Тл. Две щетки, одна на оси диска, другая — на периферии, соединяют диск с внешней цепью, включающей реостат с сопротивлением

10 Ом и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь, как и сопротивлением самого диска. Что показывает амперметр?

2.81. Намагниченная пуля пролетает вдоль оси тонкой плоской катушки, соединенной с баллистическим гальванометром через идеальный выпрямляющий элемент. Пуля намагничена вдоль своей оси, ее размеры малы в сравнении с диаметром катушки D . Опреде-

лить магнитный момент пули m , если известно, что гальванометр отклонился после пролета пули на угол φ . Известны баллистическая постоянная гальванометра b [рад/Кл], число витков катушки n и сопротивление цепи R .

2.82. По длинному идеально проводящему соленоиду длины l течет постоянный ток I_0 . Как будет меняться ток во времени, если растягивать и сжимать соленоид таким образом, чтобы длина его менялась по закону $l = l_0 + a \cos \omega t$?

2.83. Два диска с радиусами R_1 и R_2 вращаются в одном направлении с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном их плоскости (рис. 2.22). Центры дисков присоединены к обкладкам конденсатора C_1 , а ободы — через скользящие контакты к обкладкам конденсатора C_2 . Найти разности потенциалов на конденсаторах.

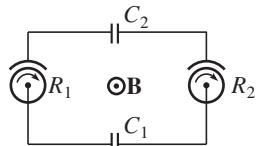


Рис. 2.22

2.84. В ускорителе электронов — бетатроне — роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электрона. Электроны же при этом движутся по орбитам примерно постоянного радиуса. Определить необходимое для этого соотношение между средним магнитным полем $\langle B \rangle(t)$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем $B_0(t)$ непосредственно на орбите. Поле считать нормальным к плоскости орбиты.

6. Магнитное поле в веществе. Проводники в магнитном поле

1. Связь между макроскопическими полями:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}),$$

где $\mathbf{J}$ — удельный магнитодипольный момент (намагниченность) вещества.

2. То же в случае линейной связи:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} \implies \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + \chi.$$

3. Плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H}.$$

4. Магнитное давление

$$\mathcal{P}_M = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H}.$$

5. Объемная плотность силы Ампера

$$\mathbf{f} = -\nabla \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{2} + (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{H}.$$

6. Сила, действующая на сердечник в соленоиде:

$$F = \frac{I}{2} \frac{d\Phi}{dx} \left[= \frac{dW_L}{dx} \right].$$

2.85. По двум параллельным проводящим плоскостям текут антипараллельные токи с однородной линейной плотностью $dI/dl = i$ (рис. 2.23). Определить величину и направление давления на каждую плоскость.

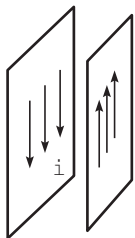


Рис. 2.23

2.86. Один из способов получения сверхсильных магнитных полей — взрывное сжатие металлического лайнера, подобного изображенному на рис. 2.24, внутри которого предварительно создается магнитное поле с индукцией B_0 . Определить индукцию поля в цилиндре в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5$ Тл, начальный внутренний радиус лайнера $R_0 = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $R_{\min} = 0,5$ см. Оболочку считать идеально проводящей. Оценить давление, необходимое для такого сжатия.

2.87. На рис. 2.25. изображена схема электромагнитного насоса для перекачки расплавленного металла. Участок трубы квадратного сечения со стороной $a = 1$ см, заполненный металлом, помещен в магнитное поле $B = 0,1$ Тл, перпендикулярное оси трубы; через этот же участок, перпендикулярно как полю, так и оси трубы, пропускается ток $I = 100$ А. Найти избыточный перепад давлений, созданный насосом.

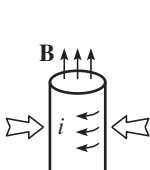


Рис. 2.24

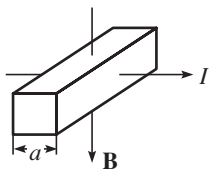


Рис. 2.25

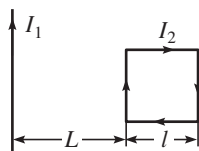


Рис. 2.26

2.88. На расстоянии $L = 10$ см от прямого провода, по которому течет ток $I_1 = 10$ кА, расположена квадратная рамка со стороной $l = 1$ см, по которой течет ток $I_2 = 1$ кА (рис. 2.26). Вся система пребывает в одной плоскости. Найти силу взаимодействия между проводом и рамкой.

2.89. В высокий цилиндрический сосуд радиуса R налит электролит. Внутри сосуда параллельно его оси расположен цилиндрический металлический стержень радиуса r_0 , поверхность которого покрыта изолирующей краской (рис. 2.27). Расстояние между осями стержня и сосуда равно d . В электролите течет параллельно оси равномерно распределенный по сечению ток I , возвращающийся обратно по

стержню. Найти силу, с которой магнитное поле, созданное рассматриваемыми токами, действует на единицу длины стержня. Куда эта сила направлена?

2.90. Два параллельных достаточно длинных провода находятся на расстоянии 20 см друг от друга. В них поддерживаются антипараллельные токи силой 20 А каждый. Какую работу на единицу длины проводов совершает магнитное поле при удалении проводов на расстояние 40 см? Как изменится при этом магнитная энергия на единицу длины линии?

2.91. Вдоль равновесного цилиндрического электронейтрального плазменного шнура (пинча) течет ток I (рис. 2.28). Определить температуру на оси пинча, считая температуру на его границе пренебрежимо малой. Плотность тока и концентрация частиц плазмы однородны по сечению, причем известно число частиц на единицу длины dN/dz .

2.92. Две одинаковых небольших катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой (рис. 2.29). Расстояние между катушками $l = 10$ см существенно превышает их линейные размеры. Число витков — N , площадь витков $S = 10 \text{ см}^2$. С какой силой взаимодействуют катушки, когда по их обмоткам текут одинаковые токи $I = 0,1 \text{ А}$? Чему равен коэффициент взаимной индукции катушек $\mathcal{M}$?

2.93. Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородно намагниченного ферромагнетика. Найти поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ внутри и вне пластины, если вектор $\mathbf{J}$ а) параллелен и б) перпендикулярен плоскости пластины.

2.94. Длинный однородный цилиндр изготовлен из материала с «замороженной» однородной намагниченностью, вектор которой параллелен его оси. Индукция в точке A оказалась равной $B_A = 0,1 \text{ Тл}$ (рис. 2.30). Найти индукцию B вблизи торца короткого цилиндра, изготовленного из того же материала, если $h = 5 \cdot 10^{-2} D$.

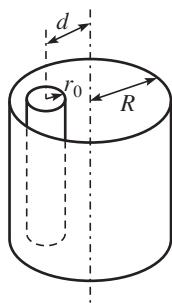


Рис. 2.27

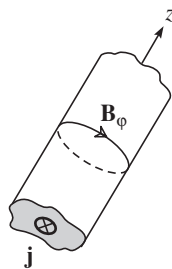


Рис. 2.28

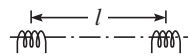


Рис. 2.29

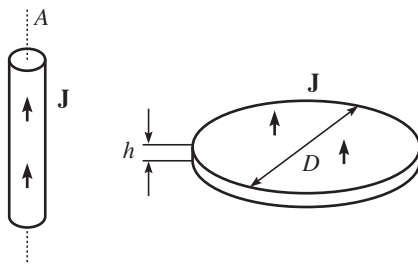


Рис. 2.30

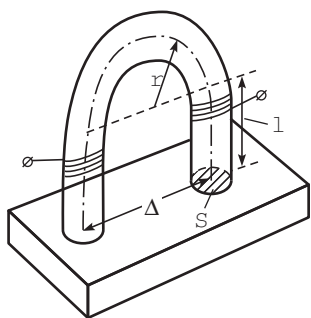


Рис. 2.31

эффицент самоиндукции L соленоида (без сердечника), если его длина $l = 0,5$ м.

2.97. Длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью μ и площадью сечения S расположен вдоль оси соленоида так, что один его конец находится внутри, а другой — вне соленоида. Найти силу F , с которой стержень втягивается в соленоид с собственным полем H .

2.98. На железный сердечник постоянного сечения длиной $l = 1$ м с зазором $\Delta = 1$ мм намотана катушка с числом витков $N = 1600$, по которой течет ток $I = 1$ А (рис. 2.32а). Зависимость $B(H)$ материала сердечника представлена на (рис. 2.32б). Определить поле в зазоре.

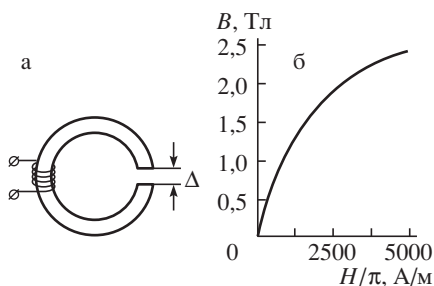


Рис. 2.32

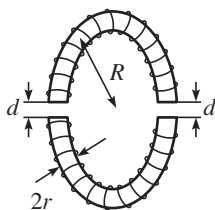


Рис. 2.33

2.99. Катушка, имеющая N витков, намотана на железный тороидальный сердечник с проницаемостью μ (рис. 2.33). Радиус тора R , радиус сечения сердечника $r \ll R$. Тор разрезан на две половины, раздвинутые так, чтобы образовался воздушный зазор $d \ll r$. Определить силу притяжения между половинками тора, если в обмотке течет ток I .

2.100. В сердечнике электромагнита имеется малый зазор l , в котором помещена пластинка из того же материала (рис. 2.34.). Какую

работу нужно совершить против магнитных сил, чтобы удалить пластинку из зазора? Периметр сердечника равен L , сечение всюду одинаково и равно S , магнитная проницаемость $\mu \gg 1$, ток через N витков обмотки равен I . Рассеянием магнитного поля пренебречь.

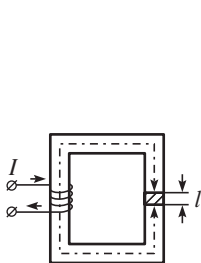


Рис. 2.34

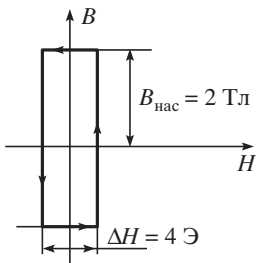


Рис. 2.35

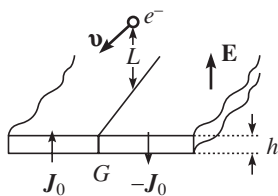


Рис. 2.36

2.101. Железный цилиндр длиной $L = 10$ см и радиуса $r = 1$ см помещен внутрь длинного соленоида, по которому пропускается переменный ток с частотой $\nu = 50$ Гц. Ток перемагничивает цилиндр от $-B_{\text{нас}}$ до $B_{\text{нас}}$ и затем от $B_{\text{нас}}$ до $-B_{\text{нас}}$. Оси соленоида и железного цилиндра параллельны. Петлю гистерезиса данного образца можно аппроксимировать кривой прямоугольной формы, представленной на рис. 2.35. Подсчитать, какое тепло выделится в сердечнике за время $\Delta t = 1$ мин.

2.102. Безграничная плоская магнитная пленка толщины h включает одну доменную стенку G , разграничивающую две полуплоскости с противоположной намагниченностью $\mp \mathbf{J}_0$ (рис. 2.36). Вектор $\mathbf{J}_0$ ортогонален к пленке. Пленка помещена в однородное электрическое поле $\mathbf{E} \parallel \mathbf{J}_0$. Над границей раздела на расстоянии $L \gg h$ параллельно ей движется с постоянной скоростью электрон. При какой величине E такое движение возможно?

7. Квазистационарное электромагнитное поле. Переменный ток

1. Уравнение колебательного контура:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

или

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = 0.$$

2. Колебания в контуре описываются следующей зависимостью:

$$x = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

или

$$x = A \exp(i\omega t - \delta t + i\varphi),$$

где

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

3. Добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\sqrt{RC}} \sqrt{\frac{L}{R}} = \frac{2\pi W}{\Delta_T W},$$

где W — запасенная в контуре энергия, а $\Delta_T W$ — потери энергии за 1 период колебаний T .

4. Импедансы конденсатора, индуктивности и резистора

$$U_C = \frac{1}{i\omega C} I, \quad U_L = i\omega L I, \quad U_R = I R.$$

5. Импеданс последовательного контура

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

6. Фазовый сдвиг между током и напряжением

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) R^{-1}.$$

7. Среднее по периоду энерговыведение:

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi.$$

8. Резонансная частота

$$\Omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

9. Ширина резонансной кривой

$$\Delta \Omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

10. Глубина скин-слоя

$$\delta_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \lambda \mu \mu_0}}.$$

11. Интегральное преобразование Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_w \exp(-i\omega t) d\omega, \quad f_w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt.$$

2.103. Для нагрева электропечи до нужной температуры T при питании постоянным током требуется 5 А. Если через обмотку печи пропускать переменный ток после однополупериодного выпрямителя, то какие показания должны давать включенные в цепь а) амперметр постоянного тока, б) амперметр переменного тока, чтобы печь имела нужную температуру?

2.104. Вольтметр магнитоэлектрической системы, присоединенный к выпрямителю, показывает 100 В. Каково амплитудное значение напряжения, даваемое выпрямителем, если выпрямитель а) однополупериодный; б) двухполупериодный?

2.105. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1, C, R расположена вторая катушка с индуктивностью L_2 (рис. 2.37). Взаимная индуктивность катушек равна $\mathcal{M}$. Какой будет частота собственных колебаний контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Считать, что активное сопротивление второй катушки пренебрежимо мало. При каком условии резонанс недостижим?

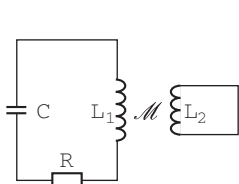


Рис. 2.37

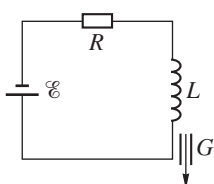


Рис. 2.38

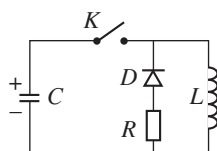


Рис. 2.39

2.106. Последовательно соединенные дроссель и омическое сопротивление присоединены к источнику постоянного напряжения ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 2.38). Индуктивность дросселя, когда в него вставлен железный сердечник G , равна L_1 , а без сердечника — L_2 . Вначале сердечник был вставлен, ток в цепи установился. В момент времени $t = 0$ сердечник очень быстро вынимают (за время, много меньшее времени релаксации). Определить ток в цепи $I(t)$ при $t > 0$.

2.107. В схеме, изображенной на рис. 2.39, в некоторый момент времени замыкают ключ K , и конденсатор емкости C , имеющий первоначальный заряд q_0 , начинает разряжаться через катушку индуктивности L . Когда ток разряда достигает максимального значения, ключ K вновь размыкают. Найти заряд Q , который протечет через сопротивление R . Сопротивление диода D в прямом направлении много меньше R , в обратном — бесконечно велико.

2.108. Цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора R и катушки большой индуктивности L присоединена к источнику, поддерживающему на зажимах постоянное напряжение U_0 (сеть постоянного тока). Для ограничения перенапряжения при отключении источника параллельно с зажимами включают некоторый конденсатор емкости C (рис. 2.40). Определить напряжение

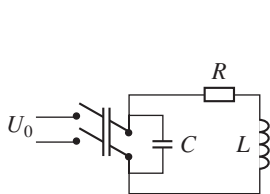


Рис. 2.40

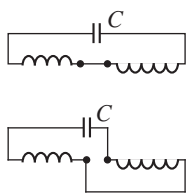


Рис. 2.41

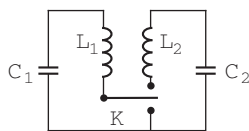


Рис. 2.42

на конденсаторе $U(t)$ после отключения источника. Параметры удовлетворяют условию $L/C > R^2/4$.

2.109. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены последовательно в колебательный контур с емкостью C двумя способами (рис. 2.41). При этом резонансные частоты оказались равны ω_1 и ω_2 , соответственно. Найти индуктивность каждой катушки и коэффициент их взаимной индукции.

2.110. К высокодобротному колебательному контуру L_1, C_1 с известной резонансной частотой ω может быть подключена ключом K последовательно цепочка L_2, C_2 (рис. 2.42). При этом резонансная частота не изменяется. Определить коэффициент взаимной индукции катушек.

2.111. Высокодобротный колебательный контур включает две последовательно соединенных катушки с индуктивностями L_1, L_2 (рис. 2.43). После того, как катушку L_2 замкнули накоротко, частота собственных колебаний контура не изменилась. Определить коэффициент взаимной индукции катушек.

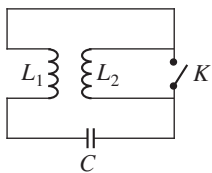


Рис. 2.43

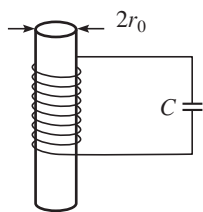


Рис. 2.44

2.112. Колебательный контур содержит индуктивность и емкость. В некоторый момент из конденсатора быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Как изменится частота колебаний контура? Во сколько раз изменятся максимальные величины заряда на конденсаторе и тока в катушке, если пластину извлекают в момент, когда заряд на конденсаторе а) отсутствует и б) максимален?

2.113. Длинный соленоид с плотной намоткой размещен на цилиндрическом железном сердечнике с магнитной проницаемостью μ и проводимостью λ . Соленоид замкнут на конденсатор, в результате чего образован контур с резонансной частотой ω (рис. 2.44). Радиус сердечника r_0 , утечки в конденсаторе несущественны, обмотку и соединительные провода можно считать идеально проводящими. Определить добротность контура.

ные провода можно считать идеально проводящими. Определить добротность контура.

2.114. Оценить глубину скин-слоя δ_{an} в зависимости от параметров проводящей среды в пределе высоких частот, когда она становится меньше длины свободного пробега электронов l_e .

2.115. Для изображенной на рис. 2.45 схемы определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока I относительно ЭДС источника $\mathcal{E}$ в зависимости от частоты источника, считая все активные сопротивления пренебрежимо малыми.

2.116. Железный сердечник несет на себе две обмотки (рис. 2.46). Одна обмотка, из большого числа n витков, присоединена к источнику синусоидальной ЭДС $\mathcal{E}$. Другая обмотка состоит из одного однородного кольца R . Точки

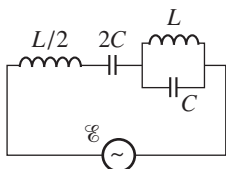


Рис. 2.45

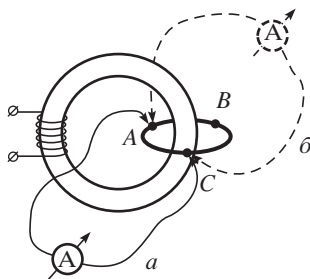


Рис. 2.46

A, B, C этого кольца отстоят друг от друга на равных расстояниях. Если к двум из этих точек присоединить амперметр переменного тока с сопротивлением r , что он покажет? Рассмотреть два варианта подключения, обозначенных на рис. 2.46.

2.117. Цепь переменного тока показана на рис. 2.47. Определить: а) сдвиг фазы между напряжением на конденсаторе и током через сопротивление; б) сдвиг фазы между напряжением на сопротивлении R и ЭДС всей цепи.

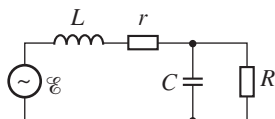


Рис. 2.47

2.118. Разделительный трансформатор имеет две одинаковых обмотки, у каждой из которых индуктивное сопротивление на рабочей частоте в $n = 5$ раз больше омического. Найти отношение мощностей, потребляемых в первичной цепи при замкнутой и разомкнутой вторичной цепи.

2.119. На вход схемы, изображенной на рис. 2.48, подается синусоидальное напряжение с частотой ω . Исследовать зависимость амплитуды и фазы выходного напряжения от величины сопротивления R .

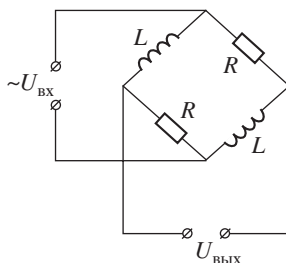


Рис. 2.48

2.120. Колебательный контур включает конденсатор с утечкой, т.е. часть тока, поступающая на одну из обкладок, проходит через слабопроводящий диэлектрик на другую обкладку. Считая параметры контура известными и пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления утечки R , вывести уравнение собственных колебаний контура.

2.121. При изменении частоты ν вынуждающей силы, действующей на линейную колебательную систему, меняется фаза δ установившихся колебаний системы и запасенная в ней энергия W . Пусть при малом сдвиге частоты от резонанса $\delta\nu = 1$ Гц фаза колебаний δ изменилась на $\pi/4$. Как изменится при этом энергия W ? Каково время затухания системы τ в режиме установившихся колебаний?

2.122. Найти спектры следующих колебаний: 1) $f(t) = A \cos^2 \omega t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала); 2) $f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$ при $\Omega \ll \omega$, $m < 1$ (амплитудная модуляция); 3) $f(t) = A \cos[\omega t + m \cos \Omega t]$ при $\Omega \ll \omega$, $m < 1$ (фазовая модуляция).

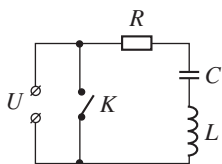


Рис. 2.49

2.123. Колебательный контур (рис. 2.49) возбуждается синусоидальным напряжением $U = U_0 \cos \omega t$, частота которого отличается от собственной частоты ω_0 , причем расстройка $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ больше ширины резонансной кривой $\Delta\omega > \delta$. Можно ли раскачать колебания в контуре периодическим замыканием и размыканием ключа K ? При какой частоте переключения Ω амплитуда колебаний в контуре будет максимальной?

2.124. Сигнал с выпрямителя имеет вид $V(t)$, представленный на рис. 2.50 а (половинки косинусоид). Его подают на схему, изображенную на рис. 2.50 б. Контур L, C настроен на частоту ω_0 , $R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$. Считая этот контур идеальным, определить форму сигнала $V_{\text{вых}}(t)$.

2.125. Найти спектр одиночного прямоугольного импульса амплитуды A и длительности τ .

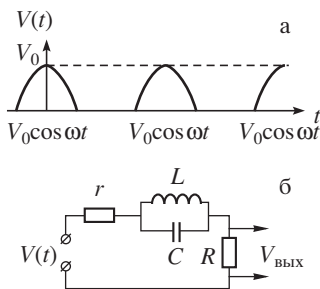


Рис. 2.50

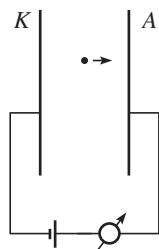


Рис. 2.51

2.126. Плоский вакуумный диод подключен к источнику постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 2.51). Эмиссионная способность катода столь мала, что ток через диод протекает в виде одиночных импульсов отдельных электронов, каждый из которых имеет длительность τ . Найти спектр сигнала на измерительном приборе при прохождении такого импульса.

8. Уравнения Максвелла

1. Уравнения Максвелла в локальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

2. Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\Sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S};$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t};$$

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\Sigma};$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

3. Материальные соотношения:

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E};$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}.$$

В простейшем случае $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$ — константы вещества.

4. Граничные условия на произвольной поверхности раздела:

$$[\mathbf{E}_{\tau}] = 0;$$

$$[\mathbf{B}_n] = 0;$$

$$[\mathbf{D}_n] = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = dq/dS;$$

$$[\mathbf{H}_{\tau}] = 0 \quad \text{или} \quad i = dI/dl.$$

5. Плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}).$$

6. Вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}].$$

7. Теорема Пойнтинга в интегральной форме:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \mathbf{j}\mathbf{E} dV - \int_s \mathbf{S} ds.$$

8. Теорема Пойнтинга в локальной форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j}\mathbf{E}.$$

2.127. Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиуса R . Расстояние между дисками $d \ll R$. Пространство между ними заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ . Конденсатор включен в цепь переменного тока $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, определить отношение максимальной магнитной энергии в конденсаторе к максимальной электрической.

2.128. Пространство внутри длинного соленоида, обмотка которого включает N витков, заполнено однородным веществом с диэлектрической и магнитной проницаемостью, соответственно, ε и μ . Известна длина соленоида l и радиус R . По обмотке течет ток $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, определить отношение максимальной электрической энергии в соленоиде к максимальной магнитной.

2.129. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая — к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что в этом случае вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

2.130. Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов, а затем отключен от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой — по оси проскакивает электрическая искра и, как следствие, конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающий за время разряда из пространства между обкладками.

2.131. Цилиндрический нерелятивистский электронный пучок радиуса r_0 распространяется в свободном пространстве. Электроны пучка летят параллельно, энергия их w , а концентрация n . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в любой точке пространства.

2.132. По металлическому проводнику, имеющему форму плоской ленты, течет ток с плотностью j . Носителями тока являются электроны с концентрацией n . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в произвольной точке внутри проводника вдали от края ленты. Считать толщину ленты много меньше ее ширины, сопротивление не учитывать; $\mu \simeq 1$.

2.133. Постоянный ток I течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R , длинной катушки радиуса r_2 с плотной намоткой (линейная плотность витков n) и соосного с катушкой прямого провода радиуса r_1 (рис. 2.52). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_φ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Найти также полный поток энергии через сечение катушки.

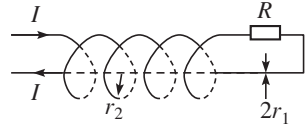


Рис. 2.52

2.134. Длинный соленоид (длина l , радиус r , число витков N) подключается к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ через сопротивление R (сопротивлением самого соленоида можно пренебречь). Найти электромагнитную энергию, втекающую в соленоид в процессе установления тока, и сравнить ее с магнитной энергией соленоида $LI^2/2$.

9. Электромагнитные волны

1. Плотность импульса электромагнитного поля

$$\frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{1}{c^2} \mathbf{q}_w, \quad \text{где } \mathbf{q}_w \equiv n\mathcal{E}\mathbf{v} \implies \frac{d\mathbf{p}_{\text{эм}}}{dV} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{c^2}.$$

2. Плоская волна (одномерный случай):

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad f(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t + \varphi)].$$

3. Плоская волна (трехмерный случай):

$$f(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi)].$$

4. Волновое уравнение в вакууме:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{B}; \quad c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \simeq 9 \cdot 10^{16} (\text{м/с})^2,$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}.$$

5. Волновое уравнение в прозрачной среде:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = u^2 \nabla^2 \mathbf{E}, \quad \text{где} \quad u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \equiv \frac{c}{n}.$$

6. Закон дисперсии электромагнитных волн:

$$\omega^2 = k^2 c^2.$$

7. Плотность энергии в электромагнитной волне

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left(\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu} \right).$$

8. Плотность импульса в электромагнитной волне

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dV} \right\rangle = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\langle w \rangle}{c}.$$

9. Давление света на черную поверхность

$$\mathcal{P} = \frac{d^2 p_{\perp}}{dS dt} = \langle w \rangle.$$

10. Мощность излучения колеблющегося диполя

$$\dot{W} = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{c^3}.$$

11. Соотношения между углами падения, отражения и преломления:

$$\varphi = \varphi'_0; \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n = \frac{n_{\parallel}}{n_{\perp}},$$

где $n_{\perp}, n_{\parallel}$ — показатели преломления первой и второй среды.

12. Формулы Френеля:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}; \quad t_{\perp} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)};$$

$$r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}; \quad t_{\parallel} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}.$$

13. Угол Брюстера (угол полной поляризации света, отраженного от поверхности диэлектрика):

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} n.$$

2.135. Мощный СВЧ-генератор питает через волновод передающую антенну. Генератор посылает в волновод мощность $N_0 = 100$ кВт, которая частично излучается антенной, а частично отражается и поглощается в специальных нагрузках обратной волны. В волноводе, как следствие, возникает суперпозиция прямой и отраженной волн. Найти мощность $N_{\text{вых}}$, излучаемую антенной, если коэффициент стоячей волны в волноводе $l \equiv E_{\text{max}}/E_{\text{min}} = 2$.

2.136. Рассматривая импульс, представляющий собой суперпозицию двух монохроматических волн с близкими по величине частотами ω_1, ω_2 и волновыми числами k_1, k_2 , определить фазовую скорость биений (так называемую групповую скорость волн).

2.137. Плоская монохроматическая электромагнитная волна частоты ω падает нормально на плоскую гладкую поверхность проводника. Проводимость материала λ , магнитная проницаемость $\mu \simeq 1$. Оценить коэффициент отражения по мощности и амплитуде.

2.138. Плоская монохроматическая электромагнитная волна падает нормально на отражающую поверхность, частично поглощается, а частично отражается. В пространстве перед зеркалом образуется суперпозиция падающей и отраженной волн, причем коэффициент стоячей волны — отношение амплитуды в пучности к таковой в узле — равен $l = 10$. Определить коэффициент отражения по мощности.

2.139. Электрон совершает циклотронное вращение в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Получить зависимость его энергии от времени и оценить, сколько оборотов он сделает до остановки.

2.140. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Найти интенсивность $\langle E^2 \rangle_r$ отраженной волны, полагая величину $\langle E^2 \rangle_i$ известной.

2.141. Электромагнитное излучение заданной интенсивности $\langle E^2 \rangle_i$ падает по нормали из вакуума на поверхность диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . Определить давление на поверхность раздела сред.

2.142. Определить степень поляризации преломленного света, если первичный поток неполяризованного света падает под углом Брюстера из пустоты на поверхность стекла с показателем преломления $n = 1,5$.

2.143. Переменное электромагнитное поле с характерной частотой ω создается на границе слабопроводящей диэлектрической среды с параметрами $\epsilon, \mu, \lambda \ll \epsilon_0 \omega$. Определить характерную глубину проникновения.

2.144. Лазером CO_2 излучаются электромагнитные волны на двух близких частотах ν_1, ν_2 при средней вакуумной длине волны $\lambda = 10,6$ мкм. После смещения в нелинейном кристалле с излучением лазера на неодимовом стекле ($\lambda_0 = 1,06$ мкм) образуются волны с комбинационными частотами $\nu_1 + \nu_0, \nu_2 + \nu_0$. Установлено, что соответствующие им длины волн отличаются на $\delta\lambda = 0,5$ нм. Определить разность длин волн $\Delta\lambda$ излучения CO_2 -лазера.

10. Газовый разряд. Элементы физики плазмы

1. Проводимость ионизованного газа

$$\lambda = \frac{ne^2}{m\nu_{ef}}.$$

2. Магнитное давление

$$\mathcal{P}_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

3. Объемная плотность архимедовой силы

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \mathcal{P}.$$

4. Квазинейтральность $n_e = Z n_i$.

5. Плазменная частота

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}.$$

6. Радиус дебаевского экранирования

$$r_D = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}}.$$

7. Высокочастотный предел диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}.$$

8. Закон дисперсии электромагнитных волн в плазме:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \implies \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2.$$

2.145. В пространстве между пластинами плоского конденсатора, заполненного газом и подсоединенного к батарее, образуется пара ионов с зарядами $\pm e$. Найти зависимость тока в цепи от времени, считая подвижность каждого из них постоянной величиной. Какой интегральный заряд протечет в цепи в результате движения ионов?

2.146. Площадь электродов плоского газонаполненного диода $S = 10 \text{ см}^2$, межэлектродный зазор $a = 10 \text{ см}$. В режиме несамостоятельного разряда ток насыщения $I_s = 10^{-6} \text{ А}$. Какое количество элементарных зарядов того и другого знака создается каждую секунду внешним ионизатором в 1 см^3 ?

2.147. Мощный источник тока создает в тонкой цилиндрической плазменной оболочке ток $I = 5 \cdot 10^6 \text{ А}$, параллельный оси и равномерно распределенный по азимуту. Внутри оболочки предварительно создано магнитное поле $B_0 = 0,1 \text{ Тл}$. Начальный радиус цилиндра

$R_0 = 20$ см. В дальнейшем под действием тока оболочка сжимается по радиусу. Считая ее идеально проводящей, оценить, при каком радиусе ускорение оболочки поменяет знак.

2.148. Плоский конденсатор заполнен плазмой со средней концентрацией электронов и ионов n_0 и температурой T . Расстояние между пластинами a , разность потенциалов U . Пренебрегая током через плазму и считая $eU \ll k_B T$, определить пространственную зависимость потенциала между обкладками.

2.149. Электромагнитная волна падает на поверхность плазмы, концентрация которой растет вглубь, а на поверхности много меньше критической. Угол падения θ , частота волны ω . Какой концентрации соответствует поверхность, от которой произойдет отражение? Будет ли угол отражения равен углу падения?

2.150. В плазме находится дипольный излучатель, на который подается переменное напряжение с частотой ω . При какой концентрации электронов плазмы он перестает излучать электромагнитные волны?

2.151. Концентрация электронов на Солнце на расстоянии $r = 0,06R$ от границы фотосферы ($R \simeq 7 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца) примерно равна $n \simeq 2 \cdot 10^{14}$ м $^{-3}$. Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигать Земли, если вакуумная длина волны равна 1) 10 м; 2) 1 м?

2.152. Через конденсатор колебательного контура с резонансной частотой $\omega_0 = 10^7$ с $^{-1}$ параллельно пластинам пропускается электронный пучок, полностью заполняющий пространство между ними. Ток пучка $I = 1$ мА, энергия пучка $W = 1$ кэВ, сечение пучка $S = 100$ см ^{2} . Как изменится резонансная частота?

Г л а в а III

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Кинематика колебаний

1. Гармоническим колебанием называется колебание, описываемое уравнением вида

$$S(t) = a \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота, T — период колебаний, a — амплитуда, $(\omega t + \varphi)$ — фаза, φ — начальная фаза.

Гармоническое колебание изображается вектором, длина которого равна амплитуде колебаний, а угол наклона (относительно горизонтальной оси) — начальной фазе колебаний.

Сумму двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω с амплитудами a_1 и a_2 и начальными фазами φ_1 и φ_2 можно найти по правилу сложения векторов. Амплитуда a суммарного колебания определяется равенством

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Гармоническое колебание можно записать в комплексной форме:

$$V(t) = ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\omega t},$$

где $Ae^{i\varphi}$ — комплексная амплитуда.

2. Фазовая траектория гармонического колебания изображает колебательный процесс в координатах $s, \dot{s}$ и соответствует семейству эллипсов:

$$\frac{S^2}{a^2} + \frac{\dot{S}^2}{(a\omega)^2} = 1$$

с полуосями a и $a\omega$. Изображающая точка движется по эллипсу по часовой стрелке, совершая один оборот за время $T = 2\pi/\omega$.

Модулированное колебание записывается в виде

$$S(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $a(t)$ определяется законом амплитудной модуляции, а $\varphi(t)$ — законом фазовой модуляции.

3. Биения — результат сложения двух гармонических колебаний с близкими частотами $S_1 = a \cos(\omega_0 - \Omega)t$ и $S_2 = a \cos(\omega_0 + \Omega)t$ ($\Omega \ll \omega_0$). Результирующее колебание

$$S(t) = 2a \cos \Omega t \cos \omega_0 t$$

можно рассматривать как колебание частоты ω_0 , амплитуда которого $A(t)$ меняется по закону $A(t) = 2a|\cos \Omega t|$. Период биений $T =$

$= \pi/\Omega$ много больше периода «несущего» колебания с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$ при условии $\Omega \ll \omega_0$.

4. Спектральное разложение — представление колебательного процесса $S(t)$ в виде суммы гармонических колебаний:

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Комплексная форма спектрального разложения записывается в виде

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

где c_n — комплексные коэффициенты, связанные с a_n и φ_n равенствами

$$c_n = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n}, \quad c_{-n} = c_n^*.$$

Следует иметь в виду, что $S(t)$ — действительная функция. Отрицательным n соответствуют формально введенные отрицательные частоты $\omega_{-n} = -\omega_n$.

Спектральное разложение периодической функции $S(t)$ с периодом T :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

является суммой гармонических колебаний с кратными частотами $\omega_n = n\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi/T$. Амплитуды a_n и начальные фазы φ_n находятся с помощью равенств:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt, \quad a_n = \sqrt{b_n^2 + d_n^2}, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

$$d_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad \varphi_n = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{b_n}{d_n}, \quad \varphi_0 = 0,$$

$$(n = 1, 2, 3 \dots).$$

В общем случае непериодическая функция $S(t)$ представляется в виде непрерывной суммы (интеграла Фурье):

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

При заданной форме сигнала $S(t)$ его спектр (преобразование Фурье) $C(\omega)$ определяется с помощью равенства

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Соотношение неопределенности связывает ширину спектра $\Delta\omega$ с длительностью сигнала Δt :

$$\Delta\omega\Delta t \simeq 2\pi.$$

5. Векторные колебания. Если вектор $\mathbf{S}$ имеет координаты S_x и S_y , меняющиеся по гармоническому закону с частотой ω , т.е.

$$S_x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad S_y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

то конец вектора $\mathbf{S}$ движется в плоскости xy по эллипсу, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

При $\varphi_1 = \varphi_2$ эллипс вырождается в прямую $y = (A_2/A_1)x$, лежащую в первом и третьем квадрантах. При $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$ — в прямую $y = -(A_2/A_1)x$, лежащую во втором и четвертом квадрантах. При условии $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2$ уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

3.1. Для графиков, изображенных на рис. 3.1, найдите амплитуду частоту и начальную фазу гармонических колебаний.

3.2. Постройте графики следующих гармонических колебаний: $S_1(t) = 2 \cos \omega_1 t$, $S_2(t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$, $S_3 = 3 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$, $\omega_1 = 200\pi$ рад/с, $\omega = 100\pi$ рад/с.

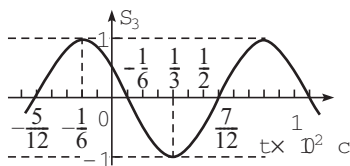
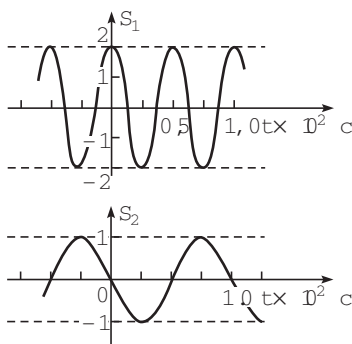


Рис. 3.1

Изобразите колебательные процессы $S_1(t)$, $S_2(t)$ и $S_3(t)$ в виде векторов. Найдите комплексную амплитуду этих колебаний. Найдите амплитуду и начальную фазу колебания, являющегося суммой колебаний S_2 и S_3 .

3.3. Найдите разность фаз двух гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды, если а) амплитуда суммарного колебания равна амплитуде слагаемых колебаний; б) в $\sqrt{2}$ раз больше амплитуды слагаемых колебаний.

3.4. Используя векторное изображение, найдите сумму N колебаний одинаковой частоты и амплитуды, фазы которых составляют арифметическую прогрессию $\varphi_n = n\alpha$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. При каких α амплитуда суммарного колебания максимальна и чему она равна?

3.5. Напишите уравнения фазовых траекторий для колебаний S_1 , S_2 , S_3 (см. зад. 3.2). Найдите положение изображающей точки на фазовой плоскости для этих колебаний в момент времени $t = 0$. Докажите, что точка, изображающая состояние системы, движется по фазовой траектории по часовой стрелке.

3.6. Напишите уравнения модулированных колебаний с несущей частотой ω , начальной фазой φ_0 и законом амплитудной модуляции:

$$\text{а) } a_1(t) = 2a_0 \cos^2 \Omega t; \quad \text{б) } a_2 = 1 + m \cos \Omega t, \quad m \leq 1.$$

Объясните смысл условия $m \leq 1$ в выражении для $a_2(t)$.

3.7. Каковы уравнения фазово-модулированных колебаний с несущей частотой ω , амплитудой a и законом фазовой модуляции:

$$\text{а) } \varphi(t) = m \cos \Omega t; \quad \text{б) } \varphi(t) = \Omega t.$$

Дайте векторную интерпретацию модулированных колебаний в задачах 3.6 и 3.7 при $\Omega \ll \omega$.

3.8. Найдите результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой амплитуды с близкими частотами ω и $\omega + \Omega$, $\Omega \ll \omega$. Каков закон изменения во времени амплитуды суммарного колебания?

3.9. При сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами ω и $\omega + \Omega$, $\Omega \ll \omega$ интенсивность суммарного колебания изменяется вдвое. Каково отношение интенсивностей слагаемых колебаний?

3.10. Найдите спектр следующих гармонических колебаний: 1) $S_1(t) = a \cos^2 \omega_0 t$; 2) $S_2(t) = a(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$; 3) $S_3(t) = a \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$ при $m \ll 1$. Дайте графическое изображение спектральных разложений. Сравните спектры колебаний S_2 и S_3 . В чем их различие? (При разложении в спектр колебания S_3 членами порядка m^2 и выше пренебречь.)

3.11. Найдите спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов длительности τ . Период следования импульсов T .

3.12. Найдите спектр прямоугольного импульса длительности τ , сравните его со спектром периодической последовательности пря-

моугольных импульсов. Найдите ширину спектра и проверьте справедливость соотношения неопределенностей.

3.13. Найдите спектр цуга — обрывка косинусоиды $S(t) = p(t) \cos \omega_0 t$, где $p(t)$ — прямоугольный импульс длительности τ .

3.14. Проекция вектора $\mathbf{S}$ изменяются по гармоническому закону $S_x = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $S_y = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, $S_z = 0$. Докажите, что конец вектора $\mathbf{S}$ описывает в плоскости xy эллиптическую траекторию. Каково уравнение эллипса? Покажите, что этот эллипс вписан в прямоугольник со сторонами a_1 , a_2 , ориентированными вдоль осей x и y . Рассмотрите частные

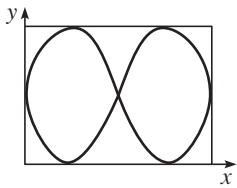


Рис. 3.2

случаи $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$. Каково движение конца вектора $\mathbf{S}$ по эллипсу в последнем случае?

3.15. Проекция вектора $\mathbf{S}$ меняются по гармоническому закону: $S_x = a_1 \cos(n\omega t + \varphi_1)$, $S_y = a_2 \cos(m\omega t + \varphi_2)$, $S_z = 0$, где n и m — целые числа. Конец вектора $\mathbf{S}$ описывает плоскую траекторию, которая называется фигурой Лиссажу. Показать что эта фигура — замкнутая кривая. Как относятся периоды по x и по y в случае, изображенном на рис. 3.2? Какой вид имеет фигура Лиссажу при $n = m$?

2. Свободные колебания в линейных системах

1. Уравнение гармонического осциллятора без затухания:

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0,$$

где ω_0 — собственная частота; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ для груза массы m , колеблющегося на пружине жесткости k , и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ для LC -колебательного контура. Свободные колебания являются гармоническими $S(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где A и φ определяются начальными условиями, т.е. значениями S и $\dot{S}$ в начальный момент времени $t = 0$.

2. Гармонический осциллятор с затуханием описывается уравнением

$$\ddot{S} + 2\delta \dot{S} + \omega_0^2 S = 0.$$

Здесь δ — коэффициент затухания, равный $R/2L$ для колебательного контура и $\alpha/2m$ для груза, колеблющегося на пружине в среде с вязким трением $\mathbf{F} = -\alpha \dot{\mathbf{S}}$.

3. Процесс колебаний имеет вид

$$S(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{при} \quad \delta < \omega_0, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

$$S(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad \text{где} \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad \text{при} \quad \delta > \omega_0,$$

$$S(t) = (A + Bt)e^{-\delta t} \quad \text{при} \quad \delta = \omega_0.$$

4. Логарифмический декремент затухания

$$d = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \delta T = \frac{1}{N},$$

где a_n, a_{n+1} — амплитуды двух последовательных отклонений, T — период колебаний, N — число колебаний за время затухания $\tau = 1/\delta$.

5. Добротность осциллятора $Q = \pi/d$. Для осциллятора с малым затуханием ($\delta \ll \omega_0$) добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W — энергия колебаний, а ΔW — потери энергии за время, равное одному периоду колебаний.

3.16. Используя второй закон Ньютона, вывести уравнение малых колебаний в системах, показанных на рис. 3.3: а) математический маятник — материальная точка массы m , подвешенная на нерастяжимой нити длины l ; б) физический маятник — твердое тело массы m , которое может свободно вращаться относительно оси O , момент

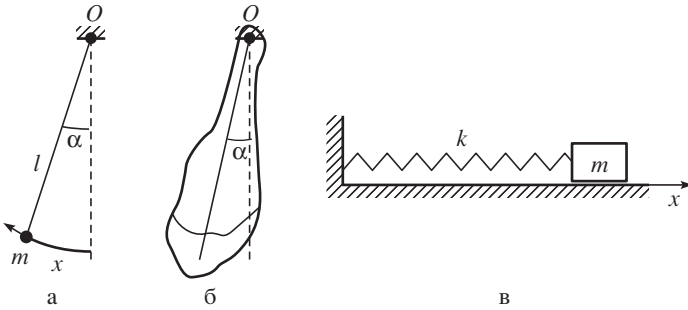


Рис. 3.3

инерции относительно оси равен J ; в) пружинный маятник — брусок массы m , лежащий на гладком горизонтальном столе, прикрепленный с помощью пружины жесткости k к вертикальной стенке. Показать, что уравнения малых колебаний во всех трех случаях имеют математически тождественный вид $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$, где $s = \alpha$ — угол отклонения маятника от положения равновесия в примерах а и б и $s = x$ — смещение бруска от положения равновесия в примере в. Доказать, что свободные колебания во всех трех случаях являются гармоническими. Каков период колебаний в системах а, б, в?

3.17. Вывести уравнение малых колебаний в идеальном электрическом контуре (рис. 3.4), считая емкость конденсатора равной C , индуктивность катушки L . Предполагается, что условие квазистационарности выполнено. Показать, что уравнение малых колебаний имеет вид $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, где q — заряд конденсатора. Найти период колебаний.

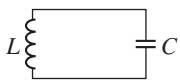


Рис. 3.4

3.18. Найдите период малых колебаний электрического диполя с дипольным моментом $\mathbf{p}$, находящегося в однородном электрическом поле напряженности $\mathbf{E}$. Момент инерции диполя относительно оси, проходящей через его центр, равен J .

3.19. Согласно модели Томпсона, атом представляет собой положительно заряженное облако радиуса R с равномерно распределенным зарядом q . Внутри облака колеблется отрицательно заряженный точечный электрон с зарядом $-q$. Найти частоту колебаний электрона, полагая радиус облака, определяющий размер атома, равным $R = 10^{-8}$ см.

3.20. Рассмотрев примеры колебательных систем в задачах 3.16–3.19, вывести уравнения малых колебаний, используя закон сохранения энергии. Убедиться в том, что к уравнению гармонического осциллятора приводит квадратичный закон изменения потенциальной энергии.

3.21. Вывести уравнение малых колебаний в системах, изображенных на рис. 3.5. Найти период колебаний если k_1 и k_2 — жесткость пружин.

3.22. Вывести уравнение колебаний камня в тоннеле, прорытом от одного полюса Земли до другого. Радиус Земли $R = 6400$ км. Найти период колебаний, полагая плотность Земли постоянной.

3.23. Найти частоту колебаний двух тел с массами m_1 и m_2 , связанных пружиной жесткости k (рис. 3.6).

3.24. Найти отношение частот колебаний молекулы H_2 и молекулы HD , считая, что сила взаимодействия атомов в молекуле пропорциональна относительному смещению ядер из положения равновесия.

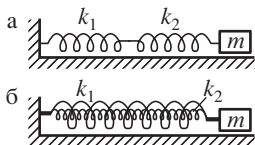


Рис. 3.5

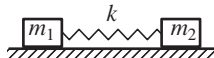


Рис. 3.6

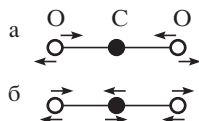


Рис. 3.7

3.25. Возможны два типа линейных колебаний молекулы CO_2 : а) ядро углерода неподвижно, а ядра кислорода движутся в противоположных направлениях и б) ядра кислорода движутся с одинаковыми скоростями навстречу ядру углерода (рис. 3.7). Найти отношение частот этих колебаний.

3.26. Ящик массы M находится на гладкой горизонтальной плоскости. Внутри ящика брусок массы m прикреплен пружиной жесткости k к боковой стенке и может скользить без трения по дну ящика (рис. 3.8). Определить период его колебаний.

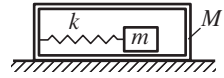


Рис. 3.8

3.27. Найти период вертикальных колебаний жидкости в U-образной трубке, если общая длина столба жидкости l . Силами поверхностного натяжения пренебречь.

3.28. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, через ключ подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 3.9). Первоначально ключ замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают, и в контуре возникают колебания с периодом T , при этом амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и емкость конденсатора.

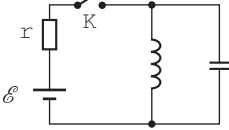


Рис. 3.9

3.29. При колебаниях груза на пружине в жидкой или газообразной среде сила сопротивления при небольших скоростях пропорциональна скорости $\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$. Вывести уравнение колебаний. Каков закон колебаний при $\gamma < 2\sqrt{km}$ и при $\gamma > 2\sqrt{km}$? Найти потери энергии за один период колебаний.

3.30. Показать, что если рассеиваемая мощность при колебаниях линейного осциллятора пропорциональна квадрату скорости, то сила сопротивления пропорциональна скорости.

3.31. Каков закон изменения во времени заряда на конденсаторе колебательного контура L , C , R после замыкания ключа (рис. 3.10)? Начальный заряд конденсатора q_0 . Рассмотреть

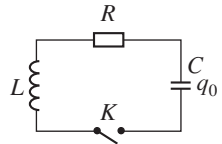


Рис. 3.10

случаи $R < 2\sqrt{L/C}$, $R > 2\sqrt{L/C}$. Найти потери энергии за один период колебания.

3.32. Выразить добротность колебательного контура с малым затуханием $R/(2L) \ll 1/\sqrt{LC}$ через его параметры L , C , R . Решить ту же задачу для пружинного маятника, масса груза m , жесткость пружины k , если сила сопротивления пропорциональна скорости $\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$.

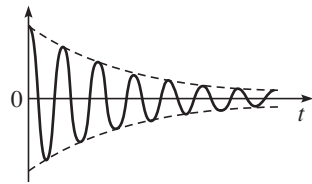


Рис. 3.11

3.33. Показать, что добротность осциллятора с малым затуханием выражается через параметры Q — затухание и ω_0 с помощью равенства $Q = \omega_0/(2\delta)$.

3.34. Определите добротность колебательной системы, осциллограмма которой показана на рис. 3.11.

3.35. Изобразить качественно фазовый портрет затухающего осциллятора при $\delta < \omega_0$ и при $\delta > \omega_0$. Как зависит шаг скручивающейся спирали на фазовой плоскости от логарифмического декремента затухания при $\delta < \omega_0$?

3. Вынужденные колебания. Спектральный анализ линейных систем. Параметрические колебания

1. Уравнение осциллятора под действием гармонической «внешней силы» имеет вид

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = \omega_0^2 \cos \omega t.$$

2. Процесс вынужденных колебаний — гармоническое колебание:

$$S = B \cos(\omega t + \varphi),$$

частота которого совпадает с частотой ω внешней силы.

3. Величина $B(\omega)$ (отношение амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде внешней силы):

$$B(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}},$$

называется резонансной кривой (амплитудной характеристикой системы), а величина $\varphi(\omega)$ (сдвиг по фазе вынужденных колебаний относительно колебаний внешней силы):

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

называется фазовой характеристикой.

4. Частотная характеристика осциллятора определяется комплексной функцией

$$H(\omega) = B(\omega)e^{i\varphi(\omega)},$$

которая представляет собой отклик линейной системы на гармоническое внешнее воздействие $e^{i\omega t}$.

5. Для контура с малым затуханием

$$B(\omega_0) = Q,$$

т.е. амплитуда вынужденных колебаний при резонансе ($\omega = \omega_0$) в Q раз больше амплитуды внешней силы.

6. Полуширина резонансной кривой — отклонение частоты внешней силы от резонансной частоты ω_0 , при котором амплитуда вынужденных колебаний уменьшается в $\sqrt{2}$ раз (т.е. равна $B(\omega_0)/\sqrt{2}$) — определяется равенством $\Delta\omega = \delta$. Вдали от резонанса амплитуда колебаний

$$B(\omega) \simeq 1 \text{ при } \omega \ll \omega_0 + \delta \text{ и } B(\omega) \simeq (\omega_0/\omega)^2 \text{ при } \omega \gg \omega_0 + \delta.$$

7. Уравнение колебаний осциллятора под действием произвольной внешней силы $f(t)$ имеет вид

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = \omega_0^2 f(t).$$

При спектральном подходе внешняя сила $f(t)$ представляется в виде суммы гармонических колебаний $f(t) = \sum a_n e^{i\omega_n t}$ и находится отклик системы (вынужденные колебания) на каждую из гармонических составляющих внешней силы $a_n e^{i\omega_n t}$:

$$S_n(t) = H(\omega_n) a_n e^{i\omega_n t},$$

где $H(\omega)$ — частотная характеристика системы. Результирующий процесс вынужденных колебаний:

$$S(t) = \sum S_n(t).$$

3.36. Вывести уравнения колебаний двух систем, показанных на рис. 3.12, и описать процесс колебаний, возникающий в системах, если в момент $t = 0$ подставку в системе а убирают, а ключ в системе б замыкают. Груз в системе а стоит на подставке так, что пружина не деформирована, а начальный заряд на конденсаторе в системе б равен нулю. Какова максимальная деформация пружины и максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях?

3.37. Генератор с малым внутренним сопротивлением посылает в контур прямоугольный импульс напряжения (рис. 3.13). Пренебрегая затуханием, найти а) при какой длительности импульса в контуре

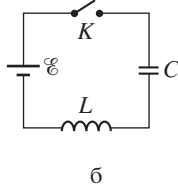
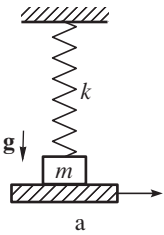


Рис. 3.12

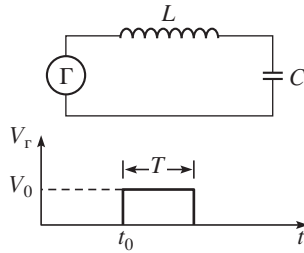


Рис. 3.13

отсутствуют колебания после прекращения импульса; б) при какой длительности импульса амплитуда колебаний после прекращения импульса максимальна. Чему она равна? Для обоих случаев нарисуйте графики тока и напряжения как функции времени, начиная с момента t_0 .

3.38. Вынужденные колебания механического осциллятора раскачиваются внешней силой, перемещающей стенку, к которой прикреплен левый конец пружины (см. рис. 3.3 в), по закону $\xi = \xi_0 \cos \omega t$.

Вывести уравнение вынужденных колебаний осциллятора. Найти зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты. Каков фазовый сдвиг между колебаниями внешней силы и колебаниями осциллятора? Трение отсутствует.

3.39. На рис. 3.14 показаны: а) цепочка L – R , б) цепочка R – C и в) механическая система — тело массы m движется в среде с

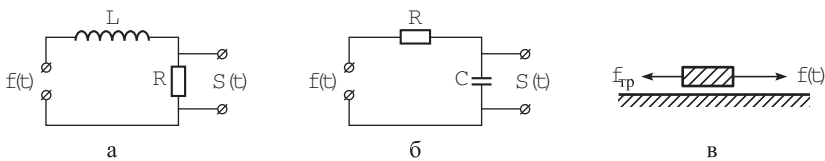


Рис. 3.14

вязким трением $\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$. В примерах а и б колебания напряжения на конденсаторе и на сопротивлении возбуждаются внешней ЭДС $f(t)$. В примере в на тело действует внешняя сила $f(t)$. Показать, что уравнение, которому подчиняется поведение всех трех систем, имеет вид

$$\dot{S} + \frac{1}{\tau} S = \frac{1}{\tau} f(t),$$

где $\tau = L/R$ в примере а, $\tau = RC$ в примере б, и $\tau = m/\gamma$ в примере в.

3.40. Найти частотные характеристики $H(\omega)$ систем, показанных на рис. 3.14 (см. задачу 3.39).

3.41. Качественно опишите движение вначале покоившегося осциллятора под влиянием одиночного толчка и серии одинаковых толчков, следующих друг за другом через период, и постройте фазовый портрет этого осциллятора, если сила сопротивления движению пропорциональна его скорости.

3.42. В цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R , индуктивности L и емкости C , включен последовательно источник синусоидальной ЭДС постоянной амплитуды и перестраиваемой частоты. Изменяя частоту источника, ее настраивают в резонанс с частотой цепи, затем уменьшают емкость контура в два раза и снова добиваются резонанса. Изменится ли сила тока при резонансе? Каково отношение резонансных частот, соответствующих первому и второму случаям?

3.43. Показать, что в контуре предыдущей задачи амплитуда силы тока I при отклонении частоты внешней ЭДС на небольшую величину Δf от резонансной частоты f_0 связана с амплитудой силы тока при резонансе I_0 следующим соотношением:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + (2\Delta f/f_0)^2 Q^2}},$$

где $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ — добротность контура.

3.44. При свободных колебаниях некоторого контура амплитуда падает в e раз за время $\tau = 1$ с. Считая добротность этого контура достаточно большой, найти: а) расстройку $\Delta\omega_1$ (при снятии резонансной кривой), при которой потребляемая контуром мощность падает в два раза; б) расстройку $\Delta\omega_2$, при которой сдвиг фазы меняется на $\pi/4$.

3.45. При изменении частоты f вынуждающей силы, действующей на линейную колебательную систему, меняется фаза δ установившихся колебаний этой системы и запасенная в ней энергия W . Пусть при малом сдвиге частоты от резонансной $\Delta f = 1$ Гц фаза колебаний δ изменилась на $\pi/4$. Как изменится при этом энергия W ? Каково время затухания τ системы в режиме свободных колебаний?

3.46. При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 3.15) с малым затуханием найдено, что напряжение на конденсаторе максимально при частоте $f_0 = 1$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $U_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение U_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?

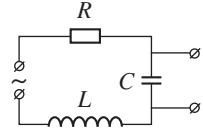


Рис. 3.15

3.47. В определенном пункте напряженность электрического поля, создаваемого радиостанцией A , в пять раз больше, чем напряженность электрического поля радиостанции B . Определить добротность контура, с помощью которого можно принимать в данном пункте станцию B без помех со стороны станции A , если для этого необходимо, чтобы амплитуда сигнала станции B в контуре была бы по крайней мере в 10 раз больше амплитуды сигнала станции A . Частота станции A равна 210 кГц, частота станции B равна 200 кГц (см. задачу 3.43).

3.48. Колебательный контур возбуждается переменной ЭДС, частота которой ω отличается от собственной частоты ω_0 , причем расстройка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ больше ширины резонансной кривой ($|\Delta\omega| > \delta$). Можно ли «раскачать» колебания в контуре (рис. 3.16) периодическим замыканием и размыканием ключа K ? При какой частоте переключений амплитуда колебаний в контуре будет максимальной?

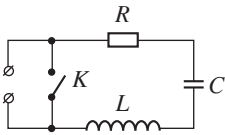


Рис. 3.16

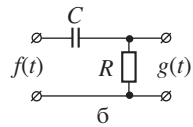
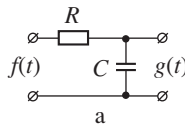


Рис. 3.17

3.49. При каких условиях, налагаемых на вид сигнала $f(t)$ (и его спектра $F(\omega)$), напряжение $g(t)$ на выходе RC -цепочек, изображенных на рис. 3.17а и рис. 3.17б, совпадает с входным напряжением $f(t)$?

3.50. Высокодобротный колебательный контур находится под действием внешней амплитудно-модулированной ЭДС, изменяющейся по закону $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos^2 \Omega t) \cos \omega_0 t$. Резонансная частота контура может перестраиваться при помощи изменения емкости. Считая коэффициент затухания контура δ заданным, определить амплитуду вынужденных колебаний в следующих случаях: а) контур настроен на несущую частоту ω_0 ; б) контур настроен на частоту $\omega_0 + 2\Omega$.

3.51. На вход колебательного контура с высокой добротностью подается амплитудно-модулированное колебание $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos^2 \Omega t) \cos \omega t$. При перестройке несущей частоты ω наблюдается несколько резонансов. Указать резонансные значения частоты ω . Определить глубину модуляции m , если известно, что амплитуда вынужденных колебаний в контуре уменьшилась в $n = 4$ раза при перестройке частоты ω от значения ω_0 до $\omega_0 + \Omega + \delta$ (ω_0 — собственная частота, δ — коэффициент затухания контура).

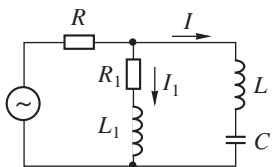


Рис. 3.18

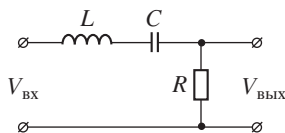


Рис. 3.19

3.52. В схеме, изображенной на рис. 3.18, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи I и I_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

3.53. На вход колебательного контура (рис. 3.19) подается амплитудно-модулированное напряжение: $V_{\text{вх}} = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ ($m < 1$). Контур настроен в резонанс с частотой ω_0 . Вычислить $V_{\text{вых}}$, если $\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, добротность контура $Q = 100$.

3.54. На вход колебательного контура (рис. 3.19) подается периодическая последовательность прямоугольных импульсов, длительность которых в 4 раза меньше величины периода. Частота повторения импульсов совпадает с резонансной частотой контура. Вычислить отношение амплитуд второй гармоники к первой на выходе контура, если его добротность $Q = 100$.

3.55. Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рис. 3.20. При каком значении емкости колебательного контура возможен параметрический резонанс? При каком

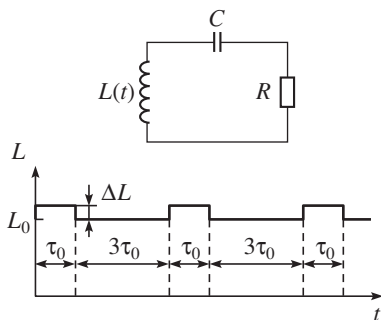


Рис. 3.20

максимальном значении активного сопротивления контура произойдет возбуждение параметрических колебаний? Выполнить числовой расчет для $L_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ Г, $\Delta L = 4 \cdot 10^{-5}$ Г, $\tau_0 = 10^{-6}$ с.

3.56. Для поддержания незатухающих колебаний в LCR -контуре ($L = 4 \cdot 10^{-3}$ Г, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6,4 \cdot 10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC .

3.57. В схеме, изображенной на рис. 3.21, анодный ток I_a при малых колебаниях в контуре линейно зависит от напряжения на сетке V_c по закону $I_a = SV_c + I_0$, где S и I_0 — постоянные величины. Катушка колебательного контура L и катушка связи $L_{св}$, намотаны на общий магнитный сердечник. Считая величины L , $L_{св}$, C и S заданными, определить, при каком максимальном значении активного сопротивления R контура возможно возбуждение автоколебаний. Какова будет эффективная добротность контура, если выбрать $R = 2R_{\max}$? Провести числовой расчет для $L = 4 \cdot 10^{-4}$ Г, $L_{св} = 4 \cdot 10^{-6}$ Г, $C = 10^{-8}$ Ф, $S = 2 \cdot 10^{-3}$ А/В.

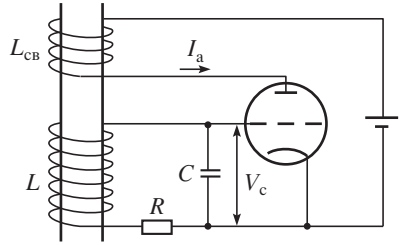


Рис. 3.21

4. Волновое уравнение. Кинематика волн

1. Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

описывает волны, распространяющиеся по оси z со скоростью v :

$$S(z, t) = S_1(z - vt) + S_2(z + vt).$$

Функция $S_1(z - vt)$ описывает волну, бегущую в положительном направлении оси z , а функция $S_2(z + vt)$ — волну, бегущую во встречном направлении. В более общем случае, если S зависит от трех координат x , y , z , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0.$$

2. У гармонической волны:

$$S(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[\omega t - \varphi(\mathbf{r})],$$

функции $a(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$ описывают пространственную структуру волны, и уравнение $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ является уравнением волновых поверхностей.

3. Комплексная форма записи гармонических волн:

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})e^{-i[\omega t - \varphi(\mathbf{r})]} = f(\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$

где $f(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ — комплексная амплитуда волны, подчиняющаяся уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0, \quad k = \frac{\omega}{v} \text{ — волновое число.}$$

4. Плоская монохроматическая волна описывается уравнением

$$S(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi),$$

где $\mathbf{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, направленный по нормали к волновой поверхности $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{const}$, причем $|\mathbf{k}| = \omega/v = 2\pi/\lambda$, v — фазовая скорость волны (скорость перемещения волновых поверхностей).

5. Комплексная амплитуда плоской волны записывается в виде

$$f(\mathbf{r}) = ae^{i\varphi}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

6. Уравнение сферической волны:

$$S(r, t) = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от источника. Комплексная амплитуда сферической волны имеет вид

$$f(r) = \frac{a_0}{r} e^{ikr}.$$

3.58. Показать, что любая функция вида $S(z, t) = S_1(z - vt) + S_2(z + vt)$ описывает волновой процесс, то есть подчиняется волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0,$$

где S_1 и S_2 — произвольные функции. Показать, что функция $S_1(z - vt)$ описывает волну, бегущую слева направо (в положительном направлении оси z), а функция $S_2(z + vt)$ волну, бегущую справа налево со скоростью v .

3.59. Показать, что любая функция вида $S(\mathbf{r} \mp \mathbf{v}t)$ подчиняется трехмерному волновому уравнению

$$\nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

где $\mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$, причем $|\mathbf{v}| = v$.

3.60. Написать уравнение гармонической (монохроматической) волны. Дать определение комплексной амплитуды волны. Показать, что комплексная амплитуда удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

3.61. Написать уравнения плоской и сферической монохроматических волн. Найти комплексные амплитуды плоской и сферической волн. Показать, что эти комплексные амплитуды удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

3.62. Волновой вектор плоской монохроматической волны (длина волны $\lambda = 1$ м) составляет угол $\alpha = \pi/6$ с осью z (и лежит в плоскости xz). Найти разность фаз колебаний в точках P_1 и P_2 , координаты которых $P_1(1, 0, \sqrt{3})$ и $P_2(3, 0, 2\sqrt{3})$ указаны в метрах. Написать уравнение волновых поверхностей этой волны.

3.63. Найти направление волнового вектора плоской волны ($\lambda = 1$ м), если колебания в точках $P_1(1, 0, \sqrt{3})$ и $P_2(3, 5, 2\sqrt{3})$ оказались синфазны (координаты указаны в метрах).

3.64. Найти результат суперпозиции двух волн одинаковой частоты и амплитуды, бегущих вдоль оси z навстречу друг другу. Каково расстояние между максимумами амплитуды (пучностями) и минимумами (узлами) получившейся стоячей волны? Каково фазовое соотношение между колебаниями в соседних пучностях?

3.65. Дать определение скалярной и векторной волны, продольной и поперечной волны, плоско-поляризованной и эллиптически-поляризованной волны.

3.66. Векторная волна с компонентами $S_x = a_1 \cos(\omega t - kz)$, $S_y = a_2(\omega t - kz - \varphi)$, $S_z = 0$ бежит вдоль оси z . Является ли эта волна поперечной? При какой разности фаз волна является линейно-поляризованной? Какова при этом ориентация плоскости колебаний? При каких условиях волна имеет круговую поляризацию? Каково направление вращения вектора $\mathbf{S}$?

5. Упругие волны

1. Смещение частиц упругой среды $\xi(z, t)$ при распространении в ней продольной упругой волны подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

т.е. имеет вид $\xi(z \pm vt)$; $v = \sqrt{E/\rho}$ — скорость волны, E — модуль упругости, ρ — плотность среды в равновесном состоянии. Соответствующие волны деформации $\varepsilon(z, t)$ и напряжения $\sigma(z, t)$

$$\varepsilon(z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \sigma(z, t) = E\varepsilon(z, t).$$

2. Волна скорости смещения частиц среды имеет вид

$$u(z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

3. Скорость упругой волны в жидкости или газе $v = \sqrt{dP/d\rho}$. В частности, в идеальном газе $v = \sqrt{\gamma RT}$, где $\gamma = C_p/C_v$.

4. Объемная плотность энергии в упругой волне

$$\omega = \frac{1}{2}(\rho u^2 + E\varepsilon^2).$$

5. Плотность потока энергии в упругой волне (вектор Умова):

$$\mathbf{P} = -\sigma u \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Аналогичное выражение имеет место для потока энергии в жидкости или газе $\mathbf{P} = \Delta p u \mathbf{n}$, где Δp — изменение давления в жидкости или газе при распространении волны $\Delta p(z, t) = -\sigma(z, t)$.

6. Продольные стоячие волны смещений в стержне с закрепленными концами имеют вид

$$\xi(z, t) = 2a \sin\left(n\frac{\pi}{L}z\right) \sin \omega_n t,$$

где L — длина стержня, а $\omega_n = \pi \frac{v}{L} n = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} n$. Соответствующие

волны скоростей и деформаций имеют вид $u = \partial \xi / \partial t$ и $\varepsilon = \partial \xi / \partial z$.

7. При нормальном падении звуковой волны на границу раздела двух упругих сред амплитудные коэффициенты отражения ρ и прозрачности τ равны

$$\rho = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad r = \frac{4\gamma}{1 + \gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}},$$

где E_1, ρ_1 — соответственно модуль упругости и плотность среды, в которой бежит падающая на границу волна, индекс 2 относится ко второй среде.

3.67. Показать, что процесс сжатий и разряжений, распространяющихся в упругой среде, для которой справедлив закон Гука, подчиняется волновому уравнению. Показать, что скорость распространения

волны (скорость звука) равна $v = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль упругости, ρ — плотность среды в равновесном состоянии.

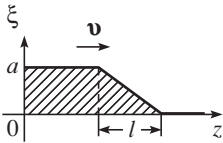


Рис. 3.22

3.68. Упругая волна бежит по стержню (вдоль оси z). По заданному графику мгновенного распределения смещений $\xi(z)$ (рис. 3.22), постройте графики скорости смещений частиц стержня $u(z)$, деформации и напряжения для

волны, бегущей слева направо и волны, бегущей справа налево.

3.69. Постройте графики распределения деформации и скорости а) в волне сжатия и б) в волне разряжения, бегущей по упругому

стержню, если соответствующий график смещений $\xi(z)$ имеет вид, показанный на рис. 3.23.

3.70. Вдоль стержня бежит упругая волна. Показать, что изменение энергии за единицу времени в участке стержня между сечениями 1 и 2 определяется равенством: $dW/dt = (q_1 - q_2)S$, где $\mathbf{q} = -\sigma u \mathbf{n}$ — вектор плотности потока энергии (вектор Умова), σ_1 и σ_2 — напряжение, u_1 и u_2 — скорость частиц стержня соответственно в сечениях 1 и 2, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны, S — площадь сечения.

3.71. Найти мгновенное распределение потока энергии в упругой волне смещений: $\xi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$. Показать, что средний за период поток энергии одинаков через любое сечение.

3.72. Найти поток энергии в стоячей упругой волне в зависимости от координаты z и времени t . Найти расстояние между сечениями $z = \text{const}$, поток энергии через которые равен нулю в любой момент времени. Какова полная энергия упругой стоячей волны, заключенная между двумя ближайшими единичными сечениями, поток энергии через которые равен нулю? Каков при этом закон изменения во времени кинетической и потенциальной энергии?

3.73. Стержень длины L закреплен на концах. Найти возможные типы продольных стоячих волн смещений и деформаций. Определить соответствующие частоты колебаний (плотность материала ρ , модуль Юнга E).

3.74. Найти энергию собственных типов продольных упругих колебаний в стержне, закрепленном на концах (см. зад. 3.73), если максимальная амплитуда смещений равна A . Какой тип колебаний имеет наименьшую энергию?

3.75. Определить наименьшую резонансную частоту колебаний воздуха между двумя параллельными близко расположенными ($L = 20$ м) высокими зданиями. Скорость звука в воздухе $V = 320$ м/с.

3.76. Вывести волновое уравнение для поперечных упругих волн в натянутой струне. Сила натяжения струны на единицу площади сечения σ , плотность материала ρ . Какова скорость распространения этих волн? Каковы частоты собственных типов поперечных колебаний в натянутой струне длины L , закрепленной на концах?

3.77. С какой силой следует натянуть гитарную струну длины $L = 60$ см и с линейной плотностью $\mu = 0,1$ г/см, чтобы она звучала с частотой $\nu = 100$ Гц на первой гармонике.

3.78. Как изменяется скорость звука в барокамере, наполненной смесью гелия и кислорода, по сравнению со скоростью звука в воздухе? Как изменяются в барокамере голоса людей?

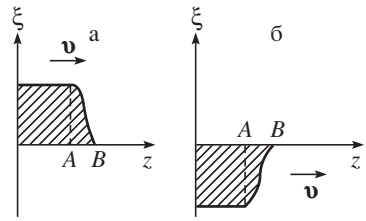


Рис. 3.23

3.79. Вывести формулы, связывающие амплитуду звуковой волны, падающей нормально на границу раздела двух упругих сред, с амплитудой отраженной и прошедшей волны. Найти коэффициент отражения R и коэффициент прозрачности T при нормальном падении.

3.80. Показать, что сумма потоков энергии в отраженной и прошедшей упругих волнах равна потоку энергии в падающей волне (рассмотреть случай нормального падения).

3.81. Показать, что при условии $E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2$ для звуковой волны (см. зад. 3.79) нет отражения ($R = 0$), а при $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ нет прошедшей волны ($T = 0$), где $\gamma = \sqrt{E_2 \rho_2 / E_1 \rho_1}$. Индекс 1 относится к среде, в которой бежит падающая на границу раздела волна, индекс 2 — к среде, в которой бежит прошедшая волна.

3.82. Показать, что коэффициенты отражения и прозрачности не зависят от того, с какой стороны волна падает на границу раздела двух упругих сред.

3.83. Показать, что на границе раздела двух упругих сред колебания смещений в отраженной волне синфазны с колебаниями в падающей волне, если $\gamma < 1$, и эти колебания противофазны, если $\gamma > 1$, где $\gamma = \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}}$. Индекс 1 относится к среде, в которой бежит падающая на границу раздела волна.

3.84. Рассмотреть предельные случаи $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ (нет волны, прошедшей во вторую среду) и показать, что стоячая волна в первой среде имеет при этом пучность смещений на границе при $\gamma = 0$, и узел смещений (а значит пучность давлений), если $\gamma = \infty$. Какой из этих случаев реализуется, если звуковая волна падает из воздуха на поверхность воды?

3.85. Почему даже тихий разговор людей на берегу реки распугивает рыб и, в то же время, «разговор» рыб не слышен на берегу?

6. Электромагнитные волны

1. В плоской монохроматической электромагнитной волне, распространяющейся в направлении оси z в однородной среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ соответственно, электрическое и магнитное поле имеют вид

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad B_y(z, t) = B_0 \cos(\omega t - kz),$$

причем поля E_x и B_y связаны равенством

$$E_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} B_y.$$

В волне, бегущей во встречном направлении, $E_x = -(c/\sqrt{\varepsilon \mu}) B_y$.

2. Плотность потока энергии в электромагнитной волне (вектор Пойнтинга) $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

3. В стоячей электромагнитной волне

$$E_x = 2E_0 \cos kz \cos \omega t, \quad B_y = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} E_0 \sin kz \sin \omega t.$$

4. В случае электромагнитной волны, бегущей между двумя параллельными идеально проводящими стенками с расстоянием d между ними (электрическое поле E_x параллельно стенкам, см. рис. 3.25):

$$E_x(y, z, t) = 2a \sin\left(n\pi \frac{y}{d}\right) \sin(\omega t - k_z z), \quad k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - n^2 \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}.$$

Фазовая скорость волны v_ϕ и длина волны λ в волноводе определяются выражениями:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2(\lambda_0/2d)^2}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - n^2(\lambda_0/2d)^2}}.$$

5. При нормальном падении плоской электромагнитной волны на границу раздела двух диэлектриков амплитудные коэффициенты отражения и прозрачности

$$\rho = \frac{n - 1}{n + 1}, \quad \tau = \frac{4n}{n + 1}, \quad n = \frac{n_1}{n_2}.$$

Угол полной поляризации отраженного света (угол Брюстера) $\operatorname{tg} \varphi_B = n$, электрическое поле в отраженной волне перпендикулярно плоскости падения.

3.86. Используя непосредственно уравнения Максвелла, показать, что меняющиеся во времени электрическое и магнитное поля распространяются в пространстве в виде волны, т.е. подчиняются волновому уравнению. Рассмотрите простейший случай — среда однородная и изотропная с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ , токи и заряды отсутствуют, а поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ зависят от одной координаты z (и от времени t). Какова скорость распространения волны?

3.87. Какова связь между полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в электромагнитной волне, бегущей в однородной и изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ ?

3.88. В каком направлении распространяется электромагнитная волна, моментальный снимок которой показан на рис. 3.24? Как изменится направление распространения волны, если направление полей либо $\mathbf{E}$, либо $\mathbf{B}$ изменить на противоположное?

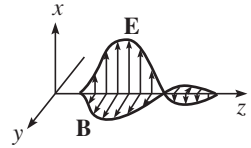


Рис. 3.24

3.89. Какова амплитуда колебаний напряженности электрического поля и начальная фаза волны, являющейся суперпозицией монохроматических волн одинаковой частоты: $E_1 = a_1 \cos(\omega t - kz - \varphi_1)$, $E_2 =$

$= a_2 \cos(\omega t - kz - \varphi_2)$ (колебания полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ происходят в одной плоскости)?

3.90. Найдите результат суперпозиции двух монохроматических волн одинаковой амплитуды с близкими частотами ω и $\omega + \Omega$, распространяющихся в одном направлении. Каково распределение средней за период энергии колебаний результирующей волны вдоль направления распространения ($\Omega \ll \omega$)?

3.91. Плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси z . Показать, что изменение во времени электромагнитной энергии между двумя единичными сечениями z_1 и z_2 определяется равенством $dW/dt = S_1 - S_2$, где $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ — вектор плотности потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга), S_1 и S_2 — плотность потока энергии соответственно в сечениях z_1 и z_2 .

3.92. Найдите результат суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу электромагнитных волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации. Каково распределение амплитуд колебаний полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в результирующей стоячей волне вдоль направления распространения? Каков фазовый сдвиг между колебаниями полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в фиксированной плоскости $z = \text{const}$? Каково расстояние между ближайшими узлами электрического и магнитного полей?

3.93. Найдите результат отражения нормально падающей плоской монохроматической электромагнитной волны от плоской поверхности идеального проводника. Каково положение узлов и пучностей электрического и магнитного полей в образовавшейся стоячей волне?

3.94. Две параллельные идеально проводящие стенки, находящиеся на расстоянии d друг от друга, образуют простейший волновод. Стенки параллельны плоскости xz (рис. 3.25). Найдите

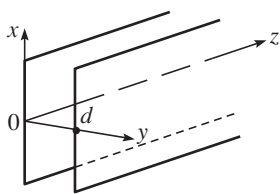


Рис. 3.25

возможные типы волн $E_x(z, y, t)$ частоты ω , распространяющихся в таком волноводе вдоль оси z , параллельной стенкам волновода, если электрическое поле параллельно оси x . Каковы возможные распределения амплитуд колебаний в сечениях $z = \text{const}$, перпендикулярных оси волновода? Найти фазовую скорость волн. Какова связь длины волны в волноводе с длиной волны той же частоты в свободном пространстве? Какова критическая частота

для рассматриваемых типов волн? Являются ли электромагнитные волны в волноводе поперечными?

3.95. Исходя непосредственно из граничных условий для электрического и магнитного полей на границе вакуума и диэлектрика, найти коэффициент отражения ρ света при нормальном падении на границу раздела. Выразить коэффициент отражения через показатель преломления диэлектрика n . Найти значения ρ при отражении света от поверхности воды ($n = 1,33$) и стекла ($n = 1,5$).

3.96. Найти коэффициент пропускания σ при нормальном падении света из воздуха на стекло с показателем преломления $n = 1,5$.

3.97. Проверить с помощью формул Френеля, что поток энергии падающей волны через границу раздела сред равен сумме потоков энергии прошедшей и отраженной волн через ту же границу.

3.98. Найти угол полной поляризации для света, отраженного от стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Найти степень поляризации преломленного света $\Delta = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}$ при падении света под этим углом. Падающий свет — естественный.

3.99. Как меняется фаза волны, отраженной от плоской границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 в случае $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и в случае $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$? Рассмотреть случай нормального падения.

3.100. Почему при переходе через плоскую границу раздела вакуум–диэлектрик перпендикулярная границе раздела составляющая поля $\mathbf{E}$ уменьшается в ε раз, а параллельная — не меняется, перпендикулярная границе раздела составляющая поля $\mathbf{B}$ не меняется, а параллельная — увеличивается в μ раз, ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

7. Интерференция волн. Когерентность

1. При наложении двух монохроматических волн одинаковой частоты с интенсивностями I_1 и I_2 интенсивность суммарной волны

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз колебаний.

2. Видность интерференционной картины

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

3. Ширина интерференционной полосы

$$l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\varphi}{2}},$$

где φ — угол схождения интерферирующих волн. При малых углах схождения $l \simeq \lambda/\varphi$.

4. Максимально допустимая разность хода при интерференции волн:

$$\Delta_{\max} \simeq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \simeq c\tau,$$

где $\Delta\lambda$ — ширина спектра волн, τ — время когерентности (длительность цуга), $c\tau$ — длина цуга. Ширина спектра $\Delta\omega$ и время когерентности τ связаны соотношением неопределенности $\tau\Delta\omega \simeq 2\pi$.

5. Радиус пространственной когерентности

$$\rho_k \simeq \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda}{b} R,$$

где ψ — угловой размер источника, b — его линейный размер, R — расстояние до источника. Максимально допустимая апертура интерференции $\Omega_{\max} \simeq \lambda/b$.

3.101. Спутник Земли, поднимаясь над горизонтом, излучает радиоволны длиной $\lambda = 10$ см. Микроволновый детектор расположен на берегу озера на высоте $h = 1$ м над уровнем воды. Рассматривая поверхность воды как идеальный проводник, определить, при каком угле α спутника над горизонтом детектор зарегистрирует 1-й и 2-й максимумы интенсивности сигнала. Рассмотреть случаи горизонтальной и вертикальной поляризации.

3.102. Радиоизлучение космического источника длины волны λ , имеющего угловой размер ψ , принимается горизонтальным вибратором, служащим антенной. Вибратор расположен на отвесном берегу на высоте h над уровнем моря. Рассматривая поверхность воды как плоское зеркало, определить, как будет меняться интенсивность принимаемого сигнала в зависимости от угла α возвышения источника над горизонтом. При каких значениях углового размера источника интенсивность принимаемого сигнала не будет зависеть от α ? Для простоты расчет провести для малых значений α и ψ .

3.103. Радиоизлучение от точечного космического источника, находящегося в плоскости экватора, принимается с помощью двух одинаковых антенн, расположенных по направлению восток–запад на расстоянии $L = 200$ м друг от друга. На входной контур приемника подается сумма сигналов, приходящих от обеих антенн по кабелям одинаковой длины. Как меняется в результате вращения Земли амплитуда напряжения U_0 на входном контуре приемника, если длина волны $\lambda = 1$ м?

3.104. Три колебания, происходящие вдоль одной и той же прямой, имеют одинаковую амплитуду и частоту. Какова средняя интенсивность при сложении этих колебаний, если их фазы независимо и беспорядочно меняются, принимая значения 0 или π ?

3.105. Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины λ составляют друг с другом малый угол φ . Волны падают на экран, плоскость которого приблизительно перпендикулярна к направлению их распространения. Написав уравнения обеих плоских волн и сложив их поля, показать, что расстояние Δx между двумя соседними интерференционными полосами на экране определяется выражением $\Delta x = \lambda/\varphi$.

3.106. Как изменится выражение для Δx в предыдущей задаче, если интерферирующие лучи падают на экран наклонно?

3.107. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы $x = 0,05$ см. Данные установки (рис. 3.26): $a = 5$ м, $d = 0,5$ см.

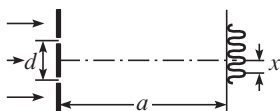


Рис. 3.26

3.108. Преломляющий угол бипризмы $\alpha = 3'26''$. Между точечным источником монохроматического света ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) и бипризмой помещена линза таким образом, что ширина интерференционных полос оказалась не зависящей от расстояния от экрана до бипризмы. Найти расстояние между соседними темными полосами, если показатель преломления стекла бипризмы $n = 1,5$. Найти максимальное число полос N , которое может наблюдаться в этой установке, если оно получается при удалении экрана от бипризмы на $L = 5 \text{ м}$.

3.109. При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, будет наблюдаться максимальное число интерференционных полос, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы составляет $l = 4 \text{ см}$? Чему равно это число полос N ? При каком положении экрана интерференционные полосы исчезнут?

3.110. Три синфазных излучателя 1, 2, 3 расположены вдоль прямой (рис. 3.27). Расстояние между излучателями 1 и 2 равно $\lambda/2$, а между излучателями 2 и 3 — в полтора раза больше. Амплитуды излучателей 1 и 2 одинаковы. Какова должна быть амплитуда излучателя 3, чтобы в диаграмме направленности системы существовали минимумы нулевой интенсивности? Найти направления на эти минимумы.

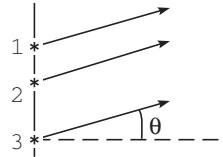


Рис. 3.27

3.111. Найти разность длин волн D -линий Na, если известно, что резкость интерференционной картины, наблюдаемой в интерферометре с двумя лучами, минимальна у четырехста девяностой, тысяча четырехста семидесятой и т.д., а максимальна у первой, девятьсот восьмидесятой и т.д. полос. Средняя длина волны D -линий $\lambda = 5893 \text{ \AA}$.

3.112. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии d между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном? Угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0,01 \text{ рад}$.

Примечание: для упрощения расчета диск Солнца заменить квадратом постоянной поверхностной яркости.

3.113. Изображение Солнца получено при помощи линзы с фокусным расстоянием $f = 50 \text{ мм}$ на отверстии экрана (размер отверстия равен величине изображения). За экраном помещены две узкие параллельные щели на расстоянии $d = 1 \text{ мм}$ друг от друга. При каком расстоянии L между экраном и щелями могут наблюдаться интерференционные полосы?

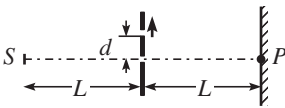


Рис. 3.28

3.114. Свет от протяженного монохроматического источника S падает на непрозрачный экран Э, в котором имеются два маленьких отверстия. Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается в точке P (рис. 3.28). Источник

света S и точка P находятся на одинаковом расстоянии L от экрана. При увеличении расстояния d между отверстиями изменение интенсивности в точке P имеет осциллирующий характер. Определить линейный размер b источника света, если 1-й минимум интенсивности в точке P наблюдается при $d = d_1 = 1$ см, а амплитуда осцилляций становится равной нулю при $d = d_1 = 20$ см (условие $d \ll L$ выполняется всегда).

3.115. Два пучка белого света, полученные от одного точечного источника, сходятся на входной щели оптического спектрального прибора. Разность хода равна $\Delta = 300$ м. Оценить разрешающую способность R спектрального прибора, который может обнаружить интерференцию этих пучков.

3.116. Два пучка белого света от одного источника приходят в точку наблюдения P (рис. 3.29 а) с разностью хода Δ . С помощью спектрографа высокой разрешающей способности исследуется рас-

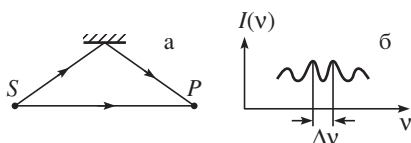


Рис. 3.29

пределение энергии в спектре колебания, возникающего в точке P при наложении обоих пучков. Оказалось, что наблюдаются чередующиеся максимумы и минимумы спектральной интенсивности $I(\nu)$, причем частотный интервал между соседними максимумами $\Delta\nu = 10$ МГц (рис. 3.29 б). Определить разность хода Δ .

3.117. В двулучевой интерференционной схеме с равными интенсивностями интерферирующих лучей используется источник белого света, размер которого $b = 0,025$ см. Интерференционная картина, наблюдаемая через светофильтр, изображена на рис. 3.30.

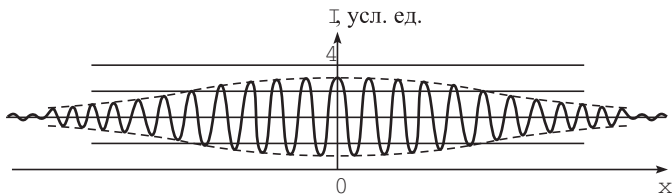


Рис. 3.30

Оценить полосу пропускания фильтра $\Delta\lambda$ и апертуру интерференции Ω . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

3.118. Интерференционная картина, полученная при интерференции двух пучков одинаковой интенсивности при апертуре ин-

терференции $\Omega = 10^{-3}$ рад, изображена на рис. 3.31. Оценить немонохроматичность источника $\Delta\lambda$ и его линейный размер b . Средняя длина волны равна $\lambda = 500$ нм.

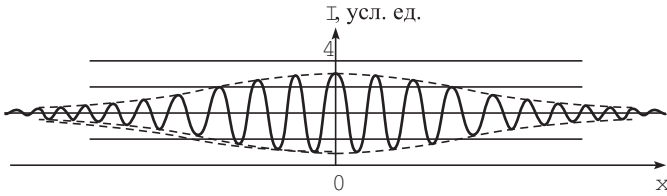


Рис. 3.31

3.119. Найти видность V интерференционной картины в опыте Юнга при использовании протяженного источника света. Размер источника света b , расстояние от источника до экрана со щелями L , расстояние между щелями d . Средняя длина волны равна λ ($L \gg d$, $L \gg b$).

3.120. Определить видность V интерференционной картины, при использовании в двухлучевой интерференционной схеме источника, спектр излучения которого изображен на рис. 3.32. Как зависит видность V от ширины спектра Δf ?

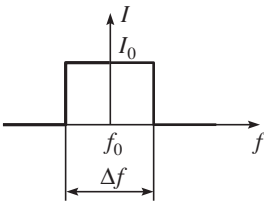


Рис. 3.32

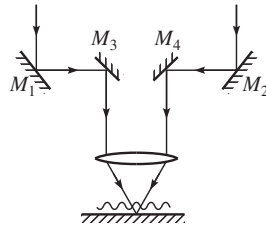


Рис. 3.33

3.121. При измерении углового диаметра гигантской красной звезды Бетельгейзе на установке, схематически изображенной на рис. 3.33, Майкельсон нашел, что интерференционные полосы исчезли, когда расстояние между внешними зеркалами M_1 и M_2 равнялось 306,5 см. Считая, что эффективная длина волны света от Бетельгейзе равна $5750 \text{ \AA}$, вычислить угловой диаметр этой звезды.

3.122. Излучающая система состоит из ряда равноотстоящих параллельных вибраторов с линейно меняющейся вдоль ряда разностью фаз излучения. Как должен меняться со временем сдвиг фаз между двумя соседними вибраторами, чтобы главный лепесток диаграммы направленности всей системы (т.е. главный дифракционный максимум) совершал круговой обзор местности с постоянной угловой скоростью (при отсутствии вращения самой решетки вибраторов)?

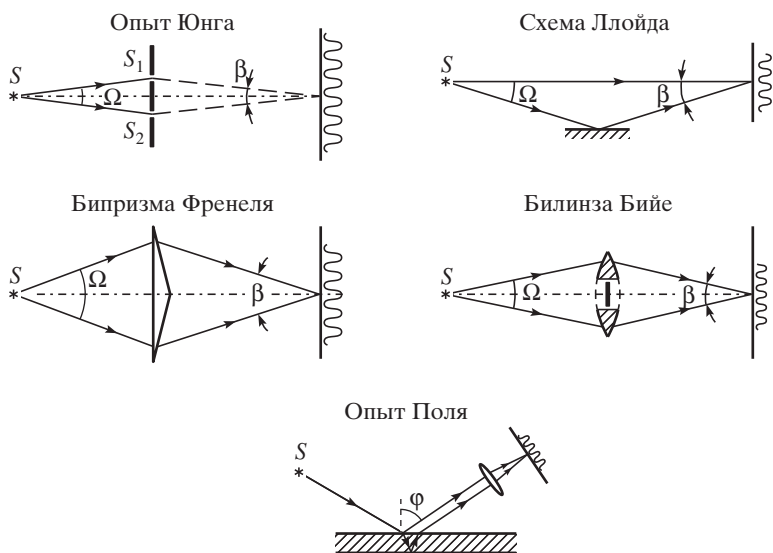


Рис. 3.34

3.123. Проанализируйте работу интерференционных схем, показанных на рис. 3.34. Какие параметры схем определяют ширину интерференционных полос и апертуру интерференции? В какой из схем возникают наиболее сильные ограничения на степень монохроматичности и размеры источника?

3.124. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдаются полосы равного наклона в тонкой плоскопараллельной пластинке толщиной $h = 0,2$ мм с показателем преломления $n = 1,41$. При этом угол наблюдения φ может изменяться от 0° до 90° . Найти максимальный и минимальный порядок интерференционных полос. Оценить допустимую степень монохроматичности $\Delta\lambda$, при которой будут наблюдаться все интерференционные полосы. Каков допустимый размер источника в этом эксперименте?

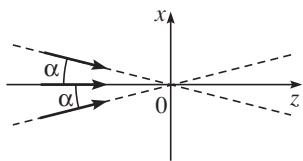


Рис. 3.35

3.125. Три плоские монохроматические волны с амплитудами 1, a и a ($a \ll 1$) падают на плоскость $z = 0$, первая из них — по нормали к плоскости, а две другие — под углами α и $-\alpha$ (рис. 3.35). При смещении плоскости

наблюдения в область $z > 0$ наблюдаются периодические изменения контраста интерференционной картины. Объясните явление. Какова максимальная и минимальная величина контраста? Каковы положения плоскости наблюдения при этом?

8. Дифракция волн. Разрешающая способность спектральных и оптических приборов. Пространственная фильтрация. Голография

1. Волновой параметр $p = \sqrt{\lambda z/b}$, где λ — длина волны, z — расстояние от препятствия до плоскости наблюдения, b — характерный размер препятствия. Область геометрической оптики соответствует волновому параметру $p \ll 1$, дифракция Френеля происходит при $p \sim 1$, а в области дифракции Фраунгофера $p \gg 1$.

2. Поле в плоскости, примыкающей к препятствию $f_0(\xi)$, и поле $g(x)$ в области $p \gg 1$ связаны преобразованием Фурье:

$$g(x) \propto \int f_0(\xi) e^{-i \frac{kx}{z} \xi} d\xi.$$

3. Дифракционная расходимость света за щелью ширины b (угловая полуширина главного дифракционного максимума) $\Delta\theta \simeq \lambda/b$.

4. Разрешающая способность спектральных приборов определяется как $\lambda/\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ — минимально обнаружимый (по критерию Рэлея) спектральный интервал.

5. Для дифракционной решетки $\lambda/\Delta\lambda = mN$, m — порядок дифракции, N — число щелей решетки.

6. Для интерферометра Фабри-Перо

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{RL}}{\lambda(1-R)},$$

где R — коэффициент отражения зеркал, L — расстояние между зеркалами.

7. Область дисперсии: $\Delta\lambda = \lambda/m$, для интерферометра Фабри-Перо $\Delta\lambda \simeq \lambda^2/2L$. Здесь $\Delta\lambda$ — максимальный спектральный интервал, при котором спектральные максимумы разных порядков не перекрываются.

8. Разрешающая способность линзы (минимально разрешаемое расстояние между двумя некогерентными точечными источниками одинаковой интенсивности) $l \simeq 1,22\lambda z/D$, где D — диаметр линзы, z — расстояние до источников.

9. Угловое разрешение телескопа $\psi_{\min} \simeq 1,22\lambda/D$, где D — диаметр объектива.

10. Разрешающая способность голограммы (ограничения, обусловленные дифракцией) $\Delta l \simeq \lambda z/D$, где D — размер голограммы, z — расстояние до предмета при записи голограммы.

3.126. Какова интенсивность света I в центре дифракционной картины от круглого экрана, если он закрывает первую зону Френеля? Интенсивность света в отсутствие экрана равна I_0 .

3.127. Непрозрачный экран, имеющий форму полудиска, помещен между точечным источником S и точкой наблюдения A таким образом, что точка O располагается на одной прямой с точками S и A (рис. 3.36). Экран закрывает небольшое нечетное число полужон Френеля. Какова интенсивность в точке A ? (Интенсивность в отсутствие экрана равна I_0 .)

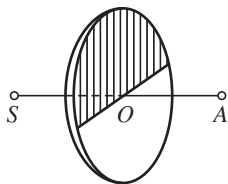


Рис. 3.36

3.128. Между точечным источником S и точкой наблюдения A помещен диск, центр которого расположен на одной прямой с точками S и A (рис. 3.36). Одна половина диска прозрачна, другая непрозрачна. Диск закрывает первые три зоны Френеля. Толщина прозрачной части диска $l = N \frac{\lambda}{2(n-1)}$, где n — показатель

преломления прозрачной части диска, N — целое число. Какова интенсивность в точке A при четном и нечетном N ?

3.129. Вдали от точечного источника S электромагнитной волны поставлен бесконечный идеально отражающий экран AB (рис. 3.37). Пользуясь векторной диаграммой, найти, как изменится интенсивность отраженной волны в точке S , если из экрана вырезать диск CD с центром в основании перпендикуляра, опущенного из S на плоскость экрана, и сместить этот диск по направлению к источнику на одну двенадцатую длины волны. Площадь диска составляет одну треть от площади первой зоны Френеля. Как изменится результат, если смещение произвести в противоположную сторону на ту же величину?

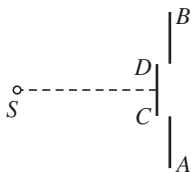


Рис. 3.37

3.130. В установке предыдущей задачи площадь диска составляет половину площади центральной зоны Френеля. На какое минимальное расстояние h следует сместить диск в направлении от источника, чтобы интенсивность отраженной волны в точке S осталась неизменной?

3.131. Оценить, во сколько раз отличаются напряженности электрического поля монохроматической волны $\lambda = 1$ мкм в фокусе сферического зеркала (диаметр $D = 10$ см, радиус кривизны $R = 1$ м) и на его входе.

3.132. Линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $D = 5$ см освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 630$ нм. Найти, во сколько раз интенсивность волны I в фокусе линзы превышает интенсивность волны I_0 , падающей на линзу. Оценить размер b пятна в фокальной плоскости.

3.133. Параболическое зеркало диаметром $D = 1$ м используется как антенна для волн длиной $\lambda = 3$ см. Оценить наименьшее расстояние $L_{\min}$, на котором следует поместить приемник для снятия диаграммы направленности.

3.134. Найти угловое распределение интенсивности света при френгоферовой дифракции на решетке из N щелей с периодом d при условии, что световые лучи падают на решетку нормально, а ширина щелей равна b .

3.135. Какова интенсивность света в фокусе зонной пластинки Френеля, если радиус пластинки R , фокусное расстояние f . Пластика освещается параллельным пучком света интенсивности I_0 , с длиной волны λ .

3.136. Плоская волна ($\lambda = 1$ м) падает нормально на плоскую периодическую структуру периода $d = 5$ м. На каких расстояниях можно наблюдать на экране изображение структуры без использования каких-либо фокусирующих элементов.

3.137. С искусственного спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на расстоянии $h = 250$ км, проводится фотографирование земной поверхности. Разрешающая способность фотопленки $N = 500$ линий/мм. Какими параметрами должен обладать объектив фотоаппарата (диаметр D , фокусное расстояние f), чтобы при фотографировании разрешались детали с линейными размерами $l \approx 1$ м?

3.138. С самолета, летящего на высоте $H = 5$ км, производится аэрофотосъемка местности. Какими следует выбрать фокусное расстояние f и диаметр объектива D фотоаппарата, чтобы сфотографировать объекты размером $l \approx 2,5$ см на фотопленку с разрешающей способностью $n = 500$ штрих/мм? На какое время τ следует открывать затвор фотоаппарата (экспозиция), чтобы движение самолета со скоростью $V = 360$ км/час не приводило к размытию изображения?

3.139. Каково должно быть минимальное расстояние между двумя точками на поверхности Марса, чтобы их изображение в телескопе (рефракторе) с диаметром объектива 60 см можно было отличить от изображения одной точки? Считать, что Марс наблюдается в момент великого противостояния, когда расстояние до него от Земли минимально и составляет $56 \cdot 10^6$ км.

3.140. Космонавты прибыли на Луну. Чтобы сообщить об этом на Землю, они растягивают на поверхности Луны черный круглый тент. Каким должен быть радиус r этого тента, чтобы его можно было заметить с Земли в телескоп с объективом $D = 5$ м? Контрастная чувствительность приемника 0,01.

3.141. Самый большой в мире телескоп был сооружен в России и установлен в астрономической обсерватории на северных отрогах Кавказского хребта, вблизи станции Зеленчукская. Диаметр зеркала этого телескопа $D = 6$ м. Найти разрешаемое им угловое расстояние $\delta\theta$ для длины волны $\lambda = 5500 \text{ \AA}$.

3.142. Излучение лазера непрерывного действия на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм мощностью $N = 10$ мВт направляется на спутник с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр $D = 30$ см. Свет, отраженный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоприемник с пороговой чувствительностью

$N_{\text{пор}} = 10^{-14}$ Вт. Оценить максимальное расстояние L_{max} до спутника, на котором отраженный сигнал еще может быть обнаружен. Поверхность спутника равномерно рассеивает падающий свет с коэффициентом отражения $\rho = 0,9$. Диаметр спутника $d = 20$ см.

3.143. Оценить расстояние L , с которого можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме мощность $N = 10$ Вт на частоте $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц, если для формирования луча используется параболическое зеркало диаметром $D = 50$ см. Глаз видит источник в зеленой части спектра, если в зрачок (диаметр зрачка $d = 5$ мм) попадает $n = 60$ квантов в секунду.

3.144. В фокальной плоскости объектива телескопа помещена фотопластинка. Освещенность изображения звезды на фотопластинке в $\alpha = 10$ раз меньше освещенности дневного неба. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды на фотопластинке стала в $\beta = 10$ раз больше освещенности изображения неба?

3.145. Какую разрешающую силу должен иметь спектральный аппарат для разрешения дублета D -линии натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å)?

3.146. Пучок рентгеновских лучей падает на решетку с периодом 1 мкм под углом $89^\circ 30'$. Угол дифракции для спектра второго порядка равен 89° . Найти λ .

3.147. Найти условие равенства нулю интенсивности m -го максимума для дифракционной решетки с периодом d и шириной щели b .

3.148. Спектр некоторого вещества в видимой области содержит ряд спектральных линий в диапазоне от 400 нм до 600 нм с минимальной разницей длин волн $\delta\lambda = 0,5$ Å. Он изучается с помощью достаточно большой дифракционной решетки с периодом $d = 0,01$ мм. С помощью линзы спектр проецируется на экран, расположенный в ее фокальной плоскости, и рассматривается затем невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения ($L = 25$ см). Определить минимальные значения диаметра линзы D и ее фокусного расстояния f , при которых наблюдатель может разглядеть все линии спектра. Диаметр зрачка глаза принять равным $d = 0,5$ см.

3.149. Чему равен порядок спектра при работе с эталоном Фабри-Перо в зеленой части спектра ($\lambda = 5500$ Å), если расстояние l между пластинками 1 см? Угол падения очень мал.

3.150. Разрешающую способность интерферометра Фабри-Перо можно определить, пользуясь следующим критерием. Для разрешения двух спектральных линий λ и λ' необходимо, чтобы в интерференционной картине, даваемой им, эти линии были разведены на расстояние не меньше полуширины линии. Пользуясь данным критерием, найти выражение для разрешающей способности интерферометра Фабри-Перо.

3.151. Зеркала интерферометра Фабри-Перо, имеющие коэффициент отражения $\rho = 99\%$ (по интенсивности), расположены на

расстоянии $L = 1$ м друг от друга. Эталон используется в качестве оптического резонатора на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. Пользуясь аналогией с колебательным контуром, определить добротность резонатора и ширину $\delta\nu$ резонансной кривой (в мегагерцах). Определить также частотный интервал $\Delta\nu$ между двумя соседними резонансами.

3.152. Интерферометр Фабри-Перо состоит из двух одинаковых плоских зеркал с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 0,95$, расположенных на некотором расстоянии L друг от друга. На интерферометр нормально падает плоская волна, содержащая две спектральные компоненты $\lambda_1 = 546,740$ нм и $\lambda_2 = 546,768$ нм. При изменении L интерферометр последовательно настраивается на пропускание одной из спектральных компонент (λ_1 или λ_2). Оценить минимальное $L_{\min}$ и максимальное $L_{\max}$ значения, при которых интерферометр способен отделить одну спектральную компоненту от другой.

3.153. На интерферометр Фабри-Перо, состоящий из двух одинаковых зеркал, падает пучок света с длиной волны $\lambda \approx 0,5$ мкм. Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы диаметром $D = 2,5$ см с фокусным расстоянием $f = 10$ см и имеет вид концентрических колец. Первое кольцо имеет диаметр $d = 1$ см. Оценить максимальную разрешающую способность спектрального прибора в этих условиях.

3.154. При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (рис. 3.38) на оптической оси устанавливается проволока Π . Оценить ее допустимый диаметр ($d_{\max}$ и $d_{\min}$) для наблюдения на экране $\mathcal{E}$ интерференционной картины от фазовой синусоидальной решетки с периодом $\Lambda = 2$ мм, освещаемой нормально падающей плоской волной длины $\lambda = 0,5$ мкм. Диаметр линзы L_2 равен $D = 2$ см, фокусное расстояние $f = 20$ см.

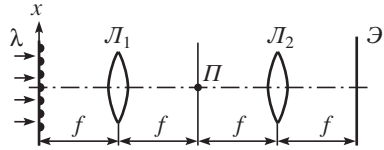


Рис. 3.38

3.155. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в следующем: в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 на оптической оси устанавливается прозрачная пластинка Π , вносящая фазовую задержку в $\pi/2$ (рис. 3.39). Найти распределение интенсивности $I(x)$ в плоскости изображения (в задней фокальной плоскости линзы L_2), если предмет — фазовая синусоидальная решетка с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = \exp(im \cos \Omega x)$, $m \ll 1$ —

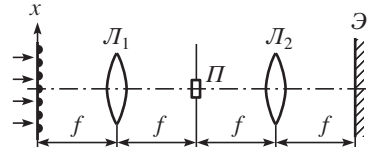


Рис. 3.39

расположен в передней фокальной плоскости линзы L_1 . Как изменится картина интенсивности, если использовать пластинку с задержкой в $3\pi/2$? Как изменится контраст, если пластинка обладает коэффициентом поглощения $k_{\text{п}}$?

3.156. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в том, что плоскость наблюдения P смещается

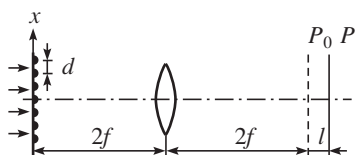


Рис. 3.40

на некоторое расстояние l относительно плоскости P_0 , сопряженной с объектом (т.е. плоскости, в которой, в соответствии с геометрической оптикой, располагается его изображение, рис. 3.40). При этом контрастность наблюдаемой картины периодически изменяется при изменении l . Найти период d фазовой синусоидальной решетки, если

в схеме, представленной на рисунке, ее контрастное изображение в первый раз возникло при $l_1 = \Delta L$. При каких других значениях l изображение будет контрастным?

3.157. Найти амплитудный коэффициент пропускания $\tau(x)$ голограммы точечного источника света, если в качестве опорной волны используется нормально падающая на плоскость голограммы плоская волна. Расстояние от источника до голограммы равно L . Считать, что прозрачность голограммы пропорциональна интенсивности света при записи. Найти положение действительного и мнимого изображений при восстановлении изображения нормально падающей плоской волной. Как изменится положение восстановленных изображений, если при записи использовать наклонный опорный пучок с углом наклона θ ? Оценить минимальный размер a_{min} голограммы, при котором полностью используется разрешающая способность фотоэмульсии, равная n линий/мм. Найти размер b восстановленного изображения.

3.158. Голограмма записана на пластинке радиусом $r = 5$ см. Она освещается квазимонохроматическим светом длины волны $\lambda = 0,5$ мкм, а изображение получается на расстоянии $L = 1$ м. Найти допустимую немонохроматичность света $\Delta\lambda$, при которой еще полностью используется теоретическая разрешающая способность голограммы.

3.159. Получена голограмма небольшого предмета, расположенного на расстоянии $L = 50$ см от нее. Каким должен быть размер D фотопластинки, чтобы записать на голограмме детали размером $b \approx 0,01$ мм? Какая немонохроматичность света $\Delta\lambda$ допустима при записи голограммы? Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм.

3.160. При записи голограммы предмета, находящегося на расстоянии $L = 1$ м, используется излучение He-Ne лазера ($\lambda = 6300 \text{ \AA}$). Восстанавливается изображение с помощью протяженного квазимонохроматического источника с угловым размером $\alpha =$

$= 10^{-4}$ рад. Каков минимальный размер деталей в восстановленном изображении? Какова при этом требуемая монохроматичность?

3.161. Излучение He–Ne лазера ($\lambda \approx 6300 \text{ \AA}$) используется для записи голограммы. Расстояние от предмета до голограммы $L = 1 \text{ м}$. Какого минимального размера d детали можно восстановить с помощью немонохроматического источника с шириной полосы $\Delta\lambda = 9 \text{ \AA}$? Каков необходимый для этого размер голограммы D ?

9. Фазовая и групповая скорость. Дисперсия

1. Фазовая скорость (скорость перемещения волновой поверхности монохроматической волны) $v = \omega/k$ (k — волновое число).

2. Групповая скорость (скорость перемещения «волнового пакета» — группы волн) $u = d\omega/dk$.

3. Связь между фазовой и групповой скоростью (формула Релея):

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

где закон дисперсии задан в виде зависимости фазовой скорости от длины волны $v(\lambda)$. Если закон дисперсии задан в виде зависимости показателя преломления от длины волны $n(\lambda)$, то

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad \text{или} \quad u = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

4. Закон дисперсии электромагнитных волн (в модели среды, состоящей из невзаимодействующих осцилляторов):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\pi}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}, \quad \text{где} \quad \omega_{\pi} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}.$$

В этом выражении q — заряд электрона, m — его масса, N — число осцилляторов в единице объема, ω_0 — собственная частота осциллятора.

5. Для радиоволн в ионосфере, когда дисперсия обусловлена свободными электронами ($\omega_0 = 0$), и рентгеновских лучей ($\omega \gg \omega_0$) закон дисперсии имеет вид

$$\varepsilon = 1 - \omega_{\pi}^2/\omega^2.$$

При этом связь между фазовой и групповой скоростью: $uv = c^2$.

3.162. Рассматривая импульс, представляющий собой суперпозицию двух гармонических волн $S_1 = \sin(\omega t - kx)$ и $S_2 = a \sin(\omega' t - k'x)$, найти групповую скорость u . Считать, что $\omega \approx \omega'$, $k \approx k'$.

3.163. Выразить групповую скорость $u = d\omega/dk$ через фазовую скорость света v и $dv/d\lambda$, а также через v и $dn/d\lambda$.

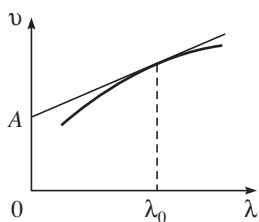


Рис. 3.41

3.164. Изобразим кривой зависимость фазовой скорости волны v от длины волны λ (рис. 3.41). Показать, что отрезок ОА на оси v , отсекаемый касательной к этой кривой в точке λ_0 , равен групповой скорости для длины волны $\lambda = \lambda_0$ (построение П.С. Эренфеста).

3.165. Плоское волновое возмущение распространяется в среде с линейным законом дисперсии $v = a + b\lambda$, где v — фазовая скорость, а a и b — постоянные. Показать, что каково бы ни было возмущение, форма

его, непрерывно изменяясь, будет периодически восстанавливаться по истечении времени $\tau = d\lambda/dv = 1/b$. Показать, что отношение пути s , пройденного возмущением за промежуток времени τ , к продолжительности этого промежутка равно групповой скорости.

3.166. Найти групповую скорость u рентгеновского излучения в среде, если предельный угол полного внутреннего отражения при падении этих волн на среду из воздуха равен α . Показатель преломления рентгеновских волн определяется выражением $n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, где ω_p — постоянная.

3.167. Получить формулу для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ ионизованного газа в монохроматическом электрическом поле $E = E_0 \cos \omega t$. Столкновениями электронов и ионов пренебречь.

3.168. Может ли показатель преломления быть меньше единицы?

3.169. Диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon(\omega)$ (см. зад. 3.167) отрицательна, если $\omega < \omega_0$. В этом случае показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ — чисто мнимая величина. Выяснить физический смысл чисто мнимого показателя преломления.

3.170. Радиоволна распространяется вверх. Волны каких частот могут проходить через ионосферу? Какие волны будут полностью отражаться?

3.171. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой $\nu = 10$ МГц равен $n = 0,90$. Найти концентрацию N электронов в ионосфере, а также фазовую v и групповую u скорости для этих радиоволн.

3.172. Получить выражение для фазовой скорости радиоволны в ионосфере в зависимости от длины волны λ в ионосфере (см. зад. 3.167).

3.173. Для оценки интегральных и средних характеристик межзвездной плазмы можно использовать экспериментальный факт, установленный сразу же после открытия пульсаров. Оказалось, что из-за дисперсии плазмы импульсы радиоизлучения пульсаров на более низких частотах всегда запаздывают по отношению к импульсам более высоких частот. Рассмотрите следующий идеализированный

пример. Два монохроматических сигнала с длинами волн $\lambda_1 = 3$ см и $\lambda_2 = 5$ см распространяются в плазме. Определить полное число n свободных электронов на пути сигналов (т.е. их число в цилиндре площадью 1 см^2 и высотой, равной расстоянию источник–приемник), если испущенные одновременно сигналы запаздывают относительно друг друга на время $\Delta t = 10^{-5}$ с. Хотя концентрация электронов и не постоянна вдоль пути сигналов, но показатель преломления везде весьма близок к единице. Определить также среднюю концентрацию n свободных электронов на пути сигналов, если их относительное запаздывание $\Delta t/t_0 = 10^{-15}$ (t_0 — время распространения от источника до приемника).

3.174. Импульсное излучение пульсара CP1919 + 21 на частоте $\nu_1 = 80$ МГц достигает Земли на $\Delta t = 7$ с позже, чем соответствующий импульс на частоте $\nu_2 = 2000$ МГц. Оценить расстояние L до пульсара, если принять среднюю концентрацию электронов в межзвездном пространстве равной $N \approx 0,05 \text{ см}^{-3}$.

3.175. Для того, чтобы короткий импульс-сигнал, описываемый функцией $f(t)$, передать через диспергирующую среду (толщина среды L) без искажений, предлагается на входе в среду сформировать плоское волновое возмущение, периодически повторяя сигнал $f(t)$. Закон дисперсии среды в полосе частот сигнала имеет вид $k(\omega) = B\omega^4$. Какова необходимая минимальная частота повторения, при которой на выходе из среды повторяется неискаженная форма сигнала?

10. Поляризация. Элементы кристаллооптики. Нелинейные оптические явления

1. При прохождении электромагнитной волны через кристаллическую пластинку (одноосный кристалл), вырезанную параллельно оптической оси, разность фазовых набегов обыкновенной волны (вектор $\mathbf{E}$ параллелен главной плоскости, содержащей луч и оптическую ось) и необыкновенной волны (вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен главной плоскости) равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)d,$$

где n_0 и n_e — соответственно необыкновенный и обыкновенный показатели преломления, d — толщина пластинки.

2. В пластинке « λ »: $\Delta\varphi = 2\pi m$.

3. В пластинке « $\lambda/2$ »: $\Delta\varphi = \pi + 2\pi m$.

4. В пластинке « $\lambda/4$ »: $\Delta\varphi = \pm(\pi/2) + 2\pi m$.

5. Закон Малюса: при прохождении линейно-поляризованной волны через поляризатор интенсивность I прошедшей волны связана с интенсивностью I_0 падающей волны равенством $I = I_0 \cos^2 \varphi$, где φ — угол между плоскостью колебаний волны и разрешенным направлением поляризатора.

3.176. Найти наименьшую толщину d пластинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий плоско поляризованный свет выходил поляризованным по кругу ($n_e = 1,5533$, $n_o = 1,5442$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см).

3.177. При какой толщине пластинка из исландского шпата является пластинкой в четверть волны для света с длиной волны $\lambda_1 = 5880 \text{ \AA}$ и может поворачивать плоскость поляризации на 90° для света с длиной волны $\lambda_2 = 5740 \text{ \AA}$? Разность показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей принять равной 0,2 для обеих длин волн. Считать, что обыкновенный и необыкновенный лучи идут по одному направлению.

3.178. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси. Определить разность хода Δ обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших через пластинку. Толщина пластинки равна 0,03 мм; $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$.

3.179. Какова должна быть наименьшая толщина d пластинки слюды, чтобы она могла служить в качестве пластинки в $1/4$ волны для света натриевого источника, если для этого света показатели преломления волн, идущих перпендикулярно к пластинке, соответственно равны $n_o = 1,5941$, $n_e = 1,5887$?

3.180. Ветровое стекло и фары автомашин снабжают пластинками из поляроида. Как должны быть расположены эти пластинки, чтобы шофер мог видеть дорогу, освещенную светом его фар, и не страдал бы от света фар встречных машин?

3.181. В интерференционном опыте Юнга между щелью S и щелями S_1 и S_2 (рис. 3.42) введен поляроид P , главные оси которого параллельны или перпендикулярны к щелям S_1 и S_2 . Как изменится интерференционная картина на экране, если щели S_1 и S_2 прикрыть пластинками в полволны, ориентированными взаимно перпендикулярно друг к другу (параллельно и перпендикулярно к щелям)? Что произойдет, если поляроид P повернуть на 90° ? Какая картина будет наблюдаться, если убрать поляроид? Рассмотреть ту же задачу, если вместо пластинки в полволны используется пластинка в четверть волны. Щели S_1 и S_2 предполагаются узкими (порядка длины волны), а расстояние между ними — большим по сравнению с их шириной.

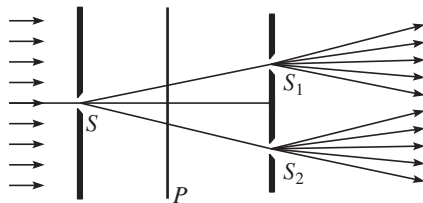


Рис. 3.42

3.182. Частично линейно поляризованный свет рассматривается через николю. При повороте николя на 60° от положения, соответствующего максимальной яркости, яркость пучка уменьшается в два раза. Найти степень поляризации пучка $\Delta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ и отношение интенсивностей естественного и линейно поляризованного света ($I_{\max}$ и $I_{\min}$ — максимальная и минимальная интенсивности света проходящего через николю).

3.183. Определить, во сколько раз изменится интенсивность частично поляризованного света, рассматриваемого через николю, при повороте николя на 60° по отношению к положению, соответствующему максимальной интенсивности. Степень поляризации света $\Delta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 0,5$.

3.184. Один поляроид пропускает 30% света, если на него падает естественный свет. После прохождения света через два таких поляроида интенсивность падает до 9%. Найти угол φ между осями поляроидов.

3.185. Некогерентная смесь линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляроид. Найдено положение поляроида, соответствующее максимальной интенсивности прошедшего света. При повороте поляроида из этого положения на угол $\alpha = 30^\circ$ интенсивность света уменьшается на $p = 20\%$. Найти отношение интенсивности I_k света, поляризованного по кругу, к интенсивности линейно поляризованного света I_d .

3.186. Как отличить свет, левополяризованный по кругу, от правополяризованного?

3.187. Как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, и от смеси естественного света с поляризованным по кругу?

3.188. Как отличить друг от друга: 1) эллиптически-поляризованный свет; 2) смесь естественного света с линейно-поляризованным светом (отчасти линейно-поляризованный свет); 3) смесь естественного света с эллиптически-поляризованным светом (отчасти эллиптически-поляризованный свет)?

3.189. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси. Определить разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших через пластинку. Толщина пластинки равна 0,03 мм; $n_0 = 1,658$, $n_e = 1,486$.

3.190. Какова должна быть наименьшая толщина d пластинки слюды, чтобы она могла служить в качестве пластинки в $1/4$ волны для света натрия, если для этого света показатели преломления волн, идущих перпендикулярно к пластинке, соответственно равны $n_1 = 1,5941$, $n_2 = 1,5887$?

3.191. Между скрещенными николями помещена пластинка кварца, вырезанная параллельно оптической оси. Оптическая ось пластинки составляет угол 45° с главными направлениями николей.

Рассчитать минимальную толщину пластинки, при которой одна линия водорода $\lambda_1 = 6563 \text{ \AA}$ будет сильно ослаблена, а другая $\lambda_2 = 4102 \text{ \AA}$ будет обладать максимальной интенсивностью. Величина анизотропии кварца $\Delta n = 0,009$.

3.192. Расположив пластинку, вырезанную из исландского шпата, параллельно его оптической оси между скрещенными николями, можно осуществить монохроматор, позволяющий, например, задержать одну из линий дублета натрия и пропустить другую. Найти, какой должна быть при этом минимальная толщина d пластинки и как ее нужно ориентировать. Показатели преломления исландского шпата для линии $\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ равны $n_{e1} = 1,48654$ и $n_{o1} = 1,65846$, для линии $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$ равны $n_{e2} = 1,48652$ и $n_{o2} = 1,65843$.

3.193. Имеется горизонтальный параллельный пучок эллиптически поляризованного света. Обнаружено, что при прохождении пучка через пластинку в $\lambda/4$ при определенной ее ориентации свет оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_1 = 23^\circ$ к вертикали. Если пластинку повернуть на угол 90° , то весь свет снова оказывается линейно поляризованным под углом $\alpha_2 = 83^\circ$ к вертикали. Найти отношение a/b полуосей эллипса поляризации и угол φ наклона большой оси.

3.194. Показатель преломления кристаллического кварца для длины волны $\lambda = 589 \text{ нм}$ равен $n_o = 1,544$ для обыкновенного луча и $n_e = 1,553$ для необыкновенного луча. На пластинку из кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает линейно поляризованный свет указанной длины волны, занимающий спектральный интервал $\Delta\lambda = 40 \text{ нм}$. Найти толщину пластинки d и направление поляризации падающего света, если свет после пластинки оказался неполяризованным.

3.195. Два когерентных пучка квазимонохроматического неполяризованного света равной интенсивности дают на экране интерференционные полосы. Какой толщины кристаллическую пластинку надо ввести на пути одного из этих пучков, чтобы интерференционные полосы исчезли и притом так, чтобы их нельзя было восстановить никакой стеклянной пластинкой, вводимой в другой пучок? Как изменится картина, если за кристаллической пластинкой поставить поляроид? При каком положении поляроида интерференционных полос не будет?

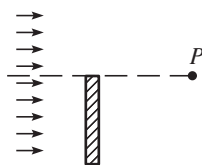


Рис. 3.43

3.196. Плоская волна монохроматического света, поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность I_0 . На пути волны ставят большую пластинку из идеального поляроида, как показано на рис. 3.43. Показатель преломления вещества поляроида n . Найти толщину

пластинки, при которой интенсивность света в точке P будет максимальной. Чему равна $I_{\max}$?

3.197. Плоская волна монохроматического света, поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность I_0 . На пути волны ставят две большие пластинки в $\lambda/4$, как показано на рис. 3.44. Главные направления пластинок ориентированы взаимно перпендикулярно. Найти интенсивность I в точке P .

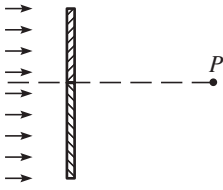


Рис. 3.44

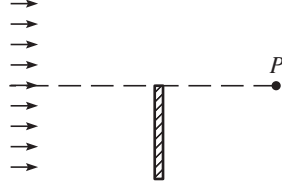


Рис. 3.45

3.198. Плоская волна круговой поляризации (длина волны λ) падает на полубесконечный экран (рис. 3.45), изготовленный из поляроида с показателем преломления для разрешенного направления n ($n - 1 \ll 1$) и толщиной $a = \lambda/[4(n - 1)]$. Какова степень поляризации β света в точке наблюдения P ?

3.199. Бесконечный экран состоит из двух поляроидных полуплоскостей, граничащих друг с другом вдоль прямой. Главное направление одной из полуплоскостей параллельно, а другой — перпендикулярно к этой прямой. На экран перпендикулярно к его поверхности падает пучок параллельных лучей естественного света с длиной волны λ . Описать качественно дифракционную картину, получающуюся за экраном.

3.200. Зонная пластинка сделана из поляроида. Во всех четных зонах полярироид ориентирован вертикально, во всех нечетных — горизонтально. Какова будет интенсивность света в основном фокусе пластинки, если она освещается неполяризованным светом?

3.201. Как изменится разрешающая способность дифракционной решетки, если одну ее половину прикрыть поляроидом, ориентированным параллельно штрихам решетки, а другую — поляроидом, ориентированным перпендикулярно к штрихам? Будет ли зависеть разрешающая сила решетки от поляризации падающего света?

3.202. Параллельный пучок естественного света интенсивностью I_0 и длины волны λ падает на систему из двух скрещенных поляроидов Π_1 и Π_2 и клина K из кварца с малым преломляющим углом α . Показатели преломления кварца равны n_e и n_o . Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с разрешенными направлениями поляроидов (рис. 3.46). Пройдя через систему, свет падает на

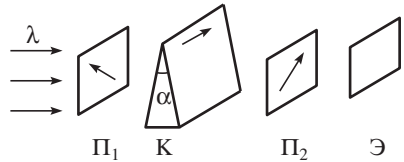


Рис. 3.46

белый экран Э. Найти распределение интенсивности света $I(x)$ на экране. Что увидит наблюдатель на экране Э, если между ним и поляридом Π_2 расположить линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости?

3.203. Явление самофокусировки объясняется зависимостью показателя преломления от интенсивности света ($n = n_0 + n_2 E_0^2$, где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в световой волне). Одним из самых больших значений n_2 обладает сероуглерод ($n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ ед. СГСЭ). Мощный пучок лазерного излучения с параболической зависимостью интенсивности от расстояния до центра пучка ($I = I_0(1 - r^2/r_0^2)$ при $r < r_0$, $I = 0$ при $r > r_0$) проходит сквозь слой сероуглерода толщиной $L = 5$ см. Найти, на каком расстоянии от кюветы с сероуглеродом сфокусируется лазерный пучок $I_0 = 5 \cdot 10^8$ Вт/см², $r_0 = 5$ мм.

3.204. Гауссов пучок неодимового лазера ($\lambda = 1$ мкм) с радиальным распределением поля по сечению: $E = E_0 \exp[-r^2/(R^2)]$ ($R = 3$ мм) и с плоским волновым фронтом падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 1$ см, сделанную из нелинейного вещества, показатель преломления которого зависит от интенсивности: $n = n_0 + n_2 E^2$ ($n_2 = 10^{-11}$ ед. СГСЭ). Оценить, при какой мощности лазера возможно уменьшить диаметр пучка (фокусировка) после прохождения пластинки.

Г л а в а IV

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

1. Атомные спектры и планетарная модель атома

1. Обобщенная формула Бальмера для спектров излучения водорода и водородоподобных атомов:

$$\omega = R_1 Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где ω — частота перехода, Z — порядковый номер атома или иона, R_1 — постоянная Ридберга или энергия Ридберга, равная 13,59 эВ (в оптике постоянной Ридберга называют также величину $R_1/2\pi\hbar c$, определяющую спектр обратных длин волн $1/\lambda$), n_1 и n_2 — целые числа: $n_1 = 1, 2, \dots$, $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$. Спектральные серии (т.е. группы линий с определенным значением n_1) атома водорода носят названия серий Лаймана ($n_1 = 1$), Бальмера ($n_1 = 2$), Пашена ($n_1 = 3$), Брэкета ($n_1 = 4$), Пфунда ($n_1 = 5$).

2. Правило квантования Бора для круговых орбит электрона в атоме водорода (в предположении бесконечно большой массы протона):

$$m_e v r = n \hbar, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Радиусы боровских орбит атома водорода и водородоподобных атомов

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e Z e^2}.$$

4. Спектр энергий атома водорода и водородоподобных атомов:

$$E_n = - \frac{m_e Z^2 e^4}{2 \hbar^2 n^2}.$$

5. Учет конечной массы ядра приводит к замене в приведенных формулах массы электрона m_e на приведенную массу μ электрона и ядра.

4.1. Согласно боровской теории в атоме водорода электрон вращается под действием электростатического притяжения по круговой орбите вокруг ядра (протона), массу которого можно считать бесконечно большой по сравнению с массой электрона. Показать, что для произвольной орбиты кинетическая энергия электрона численно равна половине потенциальной энергии, а полная энергия равна по модулю кинетической энергии, но противоположна ей по знаку.

4.2. Согласно правилу квантования Бора угловой момент может принимать только значения, кратные постоянной Планка $\hbar$. Показать, что возможное значение полной энергии есть $-me^4/(2n^2\hbar^2)$, где n — главное квантовое число.

4.3. Вычислить радиусы и полные энергии (в эВ) у ближайшей к ядру орбиты ($n = 1$) в случае водорода и водородоподобного атома олова, заряд ядра которого равен 50.

4.4. При переходе электрона с орбиты с главным квантовым числом n на орбиту с главным квантовым числом $n - 1$ избыточная энергия ΔE излучается с круговой частотой $\Delta E/\hbar$. Показать, что при увеличении n частота излучения стремится к частоте обращения электрона на орбите.

4.5. Согласно Луи де Бройлю движущийся электрон с импульсом p подобен волне с длиной волны $\lambda = h/p$. Показать, что условие квантования Бора эквивалентно требованию, чтобы на орбите укладывалось целое число длин волн де Бройля.

4.6. Длина волны границы серии Бальмера равна $3650 \text{ \AA}$. Определить длину волны границы серии Пашена.

4.7. Головная линия серии Бальмера в излучении атомарного водорода, т.е. линия, соответствующая переходу атома в состояние с квантовым числом $n = n_1 = 2$ из ближайшего состояния с $n = n_1 + 1 = 3$, имеет длину волны $\lambda_1 = 6,56 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. В излучении межзвездной среды обнаружена серия излучения того же атомарного водорода с длиной волны головной линии $\lambda_2 = 48,8 \text{ см}$. Определить соответствующее квантовое число конечного состояния атома n_2 (учесть, что $n_2 \gg 1$).

4.8. Атомарный водород освещается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 1000 \text{ \AA}$. Определить, какие линии появятся в спектре водорода.

4.9. Какую наименьшую скорость должен иметь электрон, чтобы при соударении с невозбужденным атомом водорода вызвать излучение хотя бы одной линии спектра водорода? Вычислить длину волны этой линии.

4.10. Определить наименьшую энергию, необходимую для возбуждения полного спектра дважды ионизованных атомов лития.

4.11. Постоянная Ридберга, найденная по спектру водорода, составляет $109677,6 \text{ см}^{-1}$, а по спектру гелия — $109722,3 \text{ см}^{-1}$. Определить отношение массы протона к массе электрона.

4.12. Известно, что для финитного движения частицы $\oint p dq =$

$= 2\pi n\hbar$, где p, q — обобщенные координаты, описывающие движение частицы. Показать, что применение этого условия к вращению приводит к закону квантования проекции момента импульса на заданную ось.

2. Корпускулярные свойства электромагнитного излучения

1. Связь энергии E и импульса p фотона с частотой ω и волновым вектором k электромагнитной волны:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k.$$

2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\hbar\omega = P + \frac{m_e v^2}{2},$$

где P — работа выхода (энергия связи) электрона в веществе.

3. Изменение длины волны фотона в результате комптоновского рассеяния

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

где θ — угол рассеяния фотона, $\Lambda \equiv h/m_e c = 2,42 \cdot 10^{-12}$ м — так называемая комптоновская длина волны.

4.13. По классической электромагнитной теории света поток световой энергии непрерывно распространяется от источника во все стороны. Через какое время, согласно этой теории, отдельный атом танталового катода может накопить столько энергии, чтобы стал возможен вылет фотоэлектрона, если катод находится на расстоянии 10 м от лампочки мощности 25 Вт? Работа выхода электрона из тантала равна 4 эВ. Считать, что фотоэлектрону передается вся энергия, накапливающаяся в атоме тантала, диаметр которого равен 0,3 нм.

4.14. Излучение гелий-неонового лазера мощностью $W = 1$ МВт сосредоточено в пучке диаметром $d = 0,5$ см. Длина волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм. Определить плотность потока фотонов в пучке.

4.15. Возбужденный атом водорода летит со скоростью $v = 2 \times 10^3$ м/с. На сколько процентов изменится скорость атома вследствие отдачи при излучении фотона длиной волны 0,1 мкм в направлении движения атома?

4.16. На зеркальную поверхность площадью 10 см² падает под углом 45° пучок фотонов интенсивностью 1018 фотон/с. Длина волны падающего света 400 нм. Определить величину светового давления на поверхность, если коэффициент отражения поверхности 0,75.

4.17. В опытах Лебедева, доказавшего существование светового давления, энергетическая освещенность соответствовала приблизительно 1,5 кал/(см²·мин). Вычислить давление, которое испытывали зачерненные и зеркальные лепестки его измерительной установки.

4.18. Определить красную границу фотоэффекта для серебра, у которого работа выхода равна 4,74 эВ.

4.19. Какова максимальная скорость электронов, вылетающих с поверхности цезия под действием излучения с длиной волны $3600 \text{ \AA}$? Работа выхода цезия равна $1,97 \text{ эВ}$.

4.20. Красная граница фотоэффекта для рубидия равна $5400 \text{ \AA}$. Определить работу выхода и максимальную скорость электронов при освещении поверхности металла светом с длиной волны $4000 \text{ \AA}$.

4.21. Рентгеновские лучи с длиной волны $0,5 \text{ \AA}$ выбивают электроны из атома молибдена. Какова скорость электронов, выбитых с K -уровня атома? Длина волны K_α -линии молибдена равна $0,708 \text{ \AA}$.

4.22. Определить величину наименьшего задерживающего потенциала, необходимого для прекращения эмиссии с сурьмяно-калиево-натриевого фотокатода, если его поверхность освещается излучением с длиной волны $0,4 \text{ мкм}$ и красная граница фотоэффекта для катодов данного типа лежит при $0,67 \text{ мкм}$.

4.23. Уединенный цинковый шарик облучается ультрафиолетовым светом длины волны $\lambda = 250 \text{ нм}$. До какого максимального потенциала зарядится шарик? Работа выхода для цинка $P = 3,74 \text{ эВ}$.

4.24. Электромагнитная волна круговой частоты $\Omega = 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ промодулирована синусоидально по амплитуде с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Найти энергию W фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов с энергией ионизации $W_i = 13,5 \text{ эВ}$.

4.25. Показать, что законы сохранения энергии и импульса приводят к тому, что свободный электрон не может поглощать фотоны или излучать их.

4.26. Исходя из классического закона преломления, вывести закон сохранения тангенциальной компоненты импульса фотонов при прохождении плоской границы прозрачных сред.

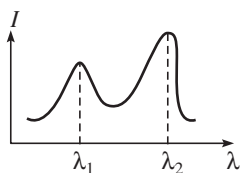


Рис. 4.1

4.27. На рис. 4.1 изображены результаты, полученные Комптоном при исследовании рассеяния рентгеновских лучей в графите. Наблюдения велись под углом $\theta = 135^\circ$ к направлению падающего пучка. Определить масштаб длин волн по оси абсцисс.

4.28. В результате комптоновского рассеяния длина волны фотона с энергией $0,3 \text{ МэВ}$ изменилась на 20% . Определить энергию электрона отдачи.

4.29. В результате эффекта Комптона фотон с энергией $0,3 \text{ МэВ}$ испытал рассеяние под углом 120° . Определить энергию рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

4.30. Фотон рубинового лазера ($\lambda = 6943 \text{ мкм}$) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $W_k = 500 \text{ МэВ}$. Оценить энергию W_γ фотона, испускаемого в результате «обратного комптон-эффекта» и движущегося вдоль траектории электрона.

4.31. Фотоны длиной волны $\lambda = 1,4 \text{ \AA}$ испытывают комптоновское рассеяние на угол $\theta = 60^\circ$. Рассеянные фотоны попадают в рентгеновский спектрограф, использующий принцип интерференционного отражения Брегга-Вульфа. При какой минимальной толщине кристаллической пластинки спектрографа можно обнаружить изменение длины волны рассеянного излучения (комптоновское смещение) в первом порядке, если постоянная кристаллической решетки $d = 1 \text{ \AA}$?

4.32. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний получил импульс отдачи p . Определить, под какими углами по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон с таким импульсом.

4.33. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний вылетел под углом 60° к направлению падающего фотона. Какую кинетическую энергию мог приобрести электрон отдачи в этом случае?

4.34. При прохождении γ -квантов через вещество образуются две группы быстрых электронов: одна — в результате фотоэффекта, а другая — комптоновского рассеяния. Каково должно быть энергетическое разрешение регистрирующей аппаратуры, чтобы отличать фотоэлектроны от комптоновских электронов с максимальной энергией? Энергия γ -квантов $W_\gamma = 5 \text{ МэВ}$.

3. Волны де Бройля. Соотношения неопределенностей

1. Длина волны де Бройля для частицы с импульсом p

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

2. Соотношения неопределенностей координата-импульс:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar, \quad \Delta p_y \Delta y \sim \hbar, \quad \Delta p_z \Delta z \sim \hbar.$$

3. Соотношение неопределенностей энергия-время:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar.$$

4. Соотношения неопределенностей координата-импульс в форме Вейля:

$$\sqrt{\Delta p_x^2} \sqrt{\Delta x^2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{и т.д.}$$

4.35. В квантовой механике частице соответствует волна, причем должны выполняться следующие условия: при прохождении частицей плоской границы, разделяющей области, в которых потенциальные энергии различны, длина волны изменяется так, чтобы для частицы и для волны показатели преломления были одинаковы; групповая скорость волны равна скорости частицы. Показать, что при

выполнении этих условий: а) частота ν и длина волны λ связаны с энергией E и импульсом p соотношениями де Бройля $\nu = E/h$, $\lambda = h/p$, где E — полная энергия, а p — импульс частицы; б) при нормальном отражении частицы от движущегося зеркала изменение энергии и доплеровское изменение частоты находятся в соответствии с соотношением де Бройля.

4.36. Вычислить длину волны де Бройля для α -частицы, нейтрона и молекулы азота, двигающихся с тепловой скоростью при температуре 25°C .

4.37. Электрон, движущийся со скоростью 5000 км/с , попадает в однородное ускоряющее электрическое поле напряженностью 10 В/см . Какое расстояние должен пройти электрон в поле, чтобы длина его дебройлевской волны стала равной $1\text{ \AA}$?

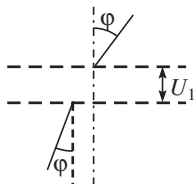


Рис. 4.2

4.38. Электроны с энергией $W_k = 100\text{ эВ}$ падают под углом $\varphi = 30^\circ$ к нормали на систему, состоящую из двух параллельных сеток, между которыми создана разность потенциалов $U_1 = 36\text{ В}$ (рис. 4.2). Найти относительный показатель преломления сред, расположенных по обе стороны сетки. При какой разности потенциалов U_2 произойдет полное отражение электронов от второй сетки?

4.39. Оценить размеры щели, на которой было бы возможно наблюдать дифракцию в потоке стальных дробин диаметром $\sim 1\text{ мм}$, летящих со скоростью 100 м/с .

4.40. Если допустить, что масса фотона $m_\gamma \neq 0$, то скорость электромагнитных волн в вакууме будет зависеть от длины волны λ . До настоящего времени по данным локационных измерений среднего расстояния L между Луной и Землей ($L = 3,5 \cdot 10^5\text{ км}$) такая зависимость не обнаружена. Измерения были проведены в сантиметровом ($\lambda = 20\text{ см}$) и оптическом диапазонах. Их точность определялась в основном неровностью поверхности Луны $\delta L = \pm 100\text{ м}$. Исходя из этих данных, оценить возможную верхнюю границу массы покоя фотона m_γ .

4.41. Оценить минимальный размер пятна $D_{\min}$, создаваемого на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $T = 1200^\circ\text{C}$. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1\text{ м}$.

4.42. При комптоновском рассеянии фотонов на атомных электронах явление осложняется тем, что электроны в атоме не находятся в покое. Оценить связанный с этим разброс в углах вылета электронов отдачи, выбиваемых из атомов водорода при рассеянии рентгеновских квантов ($\lambda = 0,1\text{ нм}$) строго назад.

4.43. Действие силы на свободно движущуюся частицу массы m можно обнаружить, наблюдая изменение ее координаты во времени. Оценить, какую минимальную силу, действующую по направлению

движения частицы, можно обнаружить таким образом за время наблюдения τ .

4.44. Процесс измерения координаты электрона путем облучения его фотоном приводит к неконтролируемому возникновению виртуальных пар, и в силу неразличимости электронов мы не можем отличить исходный электрон от электрона рожденной пары. Оценить, к какой погрешности Δx это приводит.

4.45. Возбужденный атом испускает фотон в течение 0,01 мкс. Длина волны излучения равна 6000 Å. Найти, с какой точностью могут быть определены энергия, длина волны и положение фотона.

4.46. Электрон движется со скоростью v в плоскопараллельном слое вещества с показателем преломления n перпендикулярно к ограничивающим плоскостям. Толщина слоя — b . Скорость электрона $v > c/n$, так что наблюдается излучение Вавилова-Черенкова. Оценить угловую расходимость $\Delta\varphi$ излучения, обусловленную конечной толщиной слоя.

4.47. Коллимированный пучок электронов с кинетической энергией $K = 1,65$ кэВ пропускается через резонатор лазера, генерирующего на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. При некоторых углах падения пучка относительно оси лазера, близких к прямому, может наблюдаться брэгговское рассеяние электронов на электромагнитной волне (эффект Капицы-Дирака). Найти эти углы.

4. Уравнение Шредингера. Операторы. Туннельный эффект

1. Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы во внешнем силовом поле с потенциалом $V(x, y, z)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z),$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

2. Оператор импульса частицы

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad \text{т.е.} \quad \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

3. Плотность потока вероятности частицы в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ :

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi).$$

4. Приближенная формула для коэффициента прохождения частицы массы m сквозь потенциальный барьер $U(x)$ произвольной

формы:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right),$$

где x_1 и x_2 — так называемые «точки поворота», для которых $U(x_1) = U(x_2) = E$, предэкспоненциальный фактор $D(E)$ — медленно меняющаяся функция энергии E , определяемая для каждой конкретной задачи.

4.48. Проверить следующие операторные равенства, действующие на произвольную функцию $\psi(x)$:

а) $\frac{d}{dx}x = 1 + x\frac{d}{dx}$; б) $\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$.

4.49. Найти результат применения оператора $(d^2/dx^2)x^2$ к функции $\cos x$.

4.50. Каков результат применения оператора $[(d/dx)x]^2$ к функции e^x ?

Указание. Действие указанного оператора эквивалентно последовательному выполнению операций

$$\left(\frac{d}{dx}x\right)\left(\frac{d}{dx}xe^x\right).$$

4.51. Коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется величина $[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Проверить следующие равенства для операторов:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar; \quad [\hat{x}, \hat{p}_y] = 0; \quad [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0.$$

4.52. Найти плотность потока вероятности для: плоской волны $\psi = \exp\left(i\frac{p_z}{\hbar}z\right) = e^{ikz}$; сферической волны $\psi = \frac{1}{kr}e^{ikr}$; суммы сходящейся и расходящейся сферических волн $\psi = \frac{1}{2kr}(Se^{ikr} - e^{-ikr})$.

4.53. Найти энергию электрона, при которой он беспрепятственно пройдет над прямоугольным барьером высоты 5 эВ и ширины 10^{-8} см.

4.54. Оценить для электрона энергии 1 эВ проницаемость одномерного прямоугольного потенциального барьера шириной 5 Å и высотой 2 эВ. Каков при этом коэффициент прозрачности барьера?

Указание. Проницаемостью прямоугольного барьера называется величина

$$\alpha = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}(U_0 - E)},$$

где U_0 — высота барьера, E — энергия налетающей частицы, m — ее масса. Коэффициентом прозрачности барьера называется квадрат отношения амплитуды волновой функции прошедшей волны к амплитуде волновой функции падающей волны.

4.55. Оценить для α -частицы энергии 4 МэВ проникаемость одномерного прямоугольного потенциального барьера шириной 10^{-12} см и высотой 8 МэВ.

4.56. Рассчитать коэффициент прозрачности параболического барьера

$$U(x) = \begin{cases} U_0(1 - x^2/a^2) & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

4.57. Электрон с энергией $E = 1,5$ эВ находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рис. 4.3. Ширина ямы $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Найти высоту потенциального барьера U_0 и его прозрачность D . За какое время t вероятность найти частицу в яме уменьшится в 2 раза? Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера пренебречь.

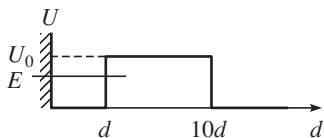


Рис. 4.3

4.58. Вывести закон Гейгера-Неттола, справедливый для α -распада и выражающий связь между периодом полураспада T и энергией E вылетающих α -частиц с помощью соотношения $\ln T = A/\sqrt{E} + b$, где A

и B — постоянные. Считать, что потенциальный барьер $U(r)$ имеет вертикальную стенку при $r = R$ (R — радиус ядра) и определяется законом Кулона при $r \geq R$. Энергия вылетающей α -частицы $E \ll U_0$ (U_0 — высота барьера).

5. Дискретность энергетических состояний

1. Волновые функции и энергии частицы массы m в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме ширины a

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a} \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right), \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2},$$

квантовое число n принимает значения $1, 2, \dots$ и т.д.

2. Спектр энергий одномерного гармонического осциллятора массы m :

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где ω — частота классических колебаний; волновая функция основ-

ного состояния ($n = 0$):

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right), \quad \text{где } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

3. Структура волновой функции атома водорода, т.е. связанного состояния электрона в кулоновском поле протона:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{n_r l}(\vartheta) P_{lm}(\vartheta) \Phi_m(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi),$$

где n_r, l и m — радиальное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Они характеризуют, соответственно, число узлов радиальной волновой функции, квадрат орбитального момента импульса: $\mathbf{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)$ и проекцию момента импульса на выделенное направление: $L_z = \hbar m$. В кулоновском поле энергия частицы зависит от суммы радиального и орбитального квантовых чисел. Поэтому для характеристики состояния частицы в кулоновском поле вместо радиального квантового числа используют так называемое главное квантовое число $n = n_r + l + 1$, от которого зависит энергия атома водорода

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad \text{где } \mu = \frac{m_e M_p}{m_e + M_p} \approx m_e.$$

Квантовые числа принимают значения:

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

Кратность вырождения уровней водорода (без учета спина), т.е. полное число состояний, имеющих одну и ту же энергию E_n , равна

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

Квадрат момента импульса трехмерного симметричного ротатора может принимать значения $\hbar^2 l(l+1)$, а энергия — $E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mathcal{I}}$, где $l = 0, 1, 2, \dots$, а $\mathcal{I}$ — момент инерции ротатора относительно оси вращения.

Квантово-механическое правило вычисления средних значений физических величин: *среднее значение величины, описываемой оператором $\hat{L}$, в состоянии, описываемом волновой функцией ψ , равно $\int \psi^* \hat{L} \psi dV$.*

4.59. Вычислить вероятность того, что частица с точностью до $0,01a$ находится на расстоянии $a/8$ от края одномерной потенциальной ямы с бесконечными стенками ширины a , если энергия частицы соответствует пятому уровню энергии.

4.60. Найти ширину потенциальной одномерной ямы с бесконечными стенками, в которой энергия протона на самом глубоком уровне равнялась бы 10 МэВ.

4.61. Частица находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с бесконечными стенками шириной a . Определить отношение вероятностей пребывания частицы в середине ямы и на расстоянии $a/4$ от края. Каково будет это отношение, если частица находится на втором энергетическом уровне?

4.62. Поток свободно распространяющихся нейтронов падает на непроницаемую стену толщины L . Сквозь стену проходит канал с прямоугольным сечением ширины $d = 10^{-3}$ см и высоты $h \gg d$. Длина канала $L \gg h$. Найти величину минимальной скорости частицы v в падающем пучке, при которой нейтроны могут пройти сквозь канал. Чему равна v в случае квадратного сечения канала $d \times d$?

4.63. Частица, находящаяся в потенциальной яме с непроницаемыми стенками, излучает фотон, переходя из состояния с номером $n + 1$ в состояние с номером n . Определить связь частоты фотона с классическим периодом колебаний частицы с энергией E_n .

4.64. Потенциальную энергию взаимодействия $U(z)$ атома гелия с плоской поверхностью твердого тела $z = 0$ можно аппроксимировать прямоугольной ямой некоторой глубины U_0 и ширины $a = 5 \text{ \AA}$, причем $U(z = 0) = +\infty$ (рис. 4.4). Полагая, что волновая функция адсорбированного атома в основном состоянии достигает максимума при $z = 0,99a$, оценить размер области локализации $\langle z \rangle$ для адсорбированных атомов в основном состоянии.

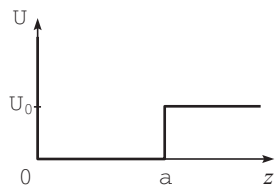


Рис. 4.4

4.65. Волновая функция частицы массы m , совершающей одномерное движение в поле с некоторым потенциалом $V(x)$, имеет вид $\psi(x) = Ax \exp(-x/a)$ при $x > 0$ и равна 0 при $x \leq 0$. Найти $V(x)$ и полную энергию частицы E , если известно, что $V \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Найти среднее значение кинетической энергии частицы.

4.66. При переходе пиона с $4f$ - на $3d$ -оболочку мезоатома фосфора ($Z = 15$) испускается рентгеновский квант с энергией $E = 40$ кэВ. Определить массу пиона и радиус $3d$ -оболочки мезоатома фосфора.

4.67. Задача об отыскании уровней энергии атома решается в предположении, что заряд ядра точечный, на самом деле ядро имеет конечный размер: его радиус равен $R_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, где A — атомная масса. Оценить знак и порядок величины относительной поправки к энергии $\Delta E/E$ мюона на K -оболочке неона ($Z = 10$, $A = 20$), связанной с тем, что часть времени мюон находится внутри ядра, т.е. в поле, отличном от кулоновского. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет

вид $\psi = (\pi a_B^3)^{1/2} \exp(-r/a_B)$, где a_B — радиус первой боровской орбиты.

4.68. В кулоновском поле простейшим сферически-симметричным решением уравнения Шредингера является волновая функция $\psi = \exp(-\alpha r)$. Какой энергии (в эВ) соответствует это состояние для электрона в кулоновском поле ядра с зарядом $Z = 10$?

4.69. Вычислить энергию (в эВ) и длину волны (в Å) перехода $2S-1S$ в ионе He^+ .

4.70. Волновая функция одного из состояний атома водорода имеет вид $\psi = A(1 + \alpha r) \exp(-\beta r)$, где A , α , β — некоторые константы. Определить энергию этого состояния, его квантовые числа и значения констант A , α , β .

4.71. В угарном газе CO из-за возбуждения молекул наблюдается пик поглощения инфракрасного излучения на длине волны $\lambda = 4,61$ мкм. Определить амплитуду A_0 нулевых колебаний молекулы CO. Оценить температуру, при которой амплитуда тепловых колебаний превзойдет A_0 .

4.72. Оценить отношение кванта колебаний молекул H_2 и O_2 к характерной энергии возбуждения валентных электронов E_e , считая эффективный коэффициент упругости молекулярной связи k равным $\approx E_e/a^2$, где a — межатомное расстояние. Оценить амплитуду нулевых колебаний.

4.73. Волновая функция трехмерного изотропного осциллятора, характеризуемого классической частотой ω и приведенной массой μ , имеет вид $\psi = A(1 + \alpha r) \exp(-\beta r^2)$, где A , α , β — некоторые константы. Определить энергию этого состояния, главное квантовое число и значения констант A , α , β .

4.74. В атоме гелия два электрона совершают колебания вокруг общего центра с частотой, которая может быть оценена, исходя из того факта, что гелий сильно поглощает излучение в области вакуумного ультрафиолета на длине волны 584 Å . Оценить диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в стационарном поле (плотность гелия равна $0,14 \text{ г/см}^3$).

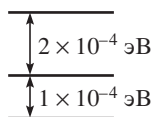


Рис. 4.5

4.75. На опыте измерены переходы между тремя последовательными уровнями вращательной полосы двухатомной молекулы (рис. 4.5). Найти квантовые числа l этих уровней и момент инерции J молекулы.

4.76. Переход из первого вращательного состояния молекулы HBr в основное состояние сопровождается излучением с обратной длиной волны 17 см^{-1} . Оценить размер молекулы.

4.77. При прохождении света через среду наряду с упругим происходит и неупругое рассеяние фотонов, связанное, в частности, с их взаимодействием с колебательными степенями свободы молекул — комбинационное рассеяние. Оценить отношение интенсивностей фиолетового и красного спутников в спектре

рассеянного монохроматического излучения от молекул четыреххлористого углерода CCl_4 при температуре, равной 27°C , если известно, что обратная длина волны соответствующего перехода в колебательном спектре $1/\lambda = 217 \text{ см}^{-1}$.

4.78. При комбинационном рассеянии линии ртути с длиной волны $3650 \text{ \AA}$ молекулами кислорода наблюдается спутник с длиной волны $3870 \text{ \AA}$. Определить частоту собственных колебаний молекул кислорода.

6. Спин. Магнитные свойства атомов

1. Магнитный момент атома

$$\mu = g\sqrt{J(J+1)}\mu_B, \quad g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

где μ_B — магнетон Бора, g — фактор Ланде (g -фактор), J, L, S — квантовые числа полного, орбитального и спинowego моментов электронной оболочки соответственно.

2. Формула тонкой структуры спектра атома водорода (с учетом релятивистских поправок):

$$E_{nj} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2}{n^3} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right],$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, n — главное квантовое число, j — квантовое число полного момента электрона, принимающее значения $l \pm 1/2$ (l — орбитальное квантовое число).

4.79. Электрон массой m и зарядом e под действием центральных сил ядра описывает замкнутую траекторию. Показать, что отношение магнитного момента заряда на орбите к угловому моменту есть постоянная величина, не зависящая от формы орбиты и равная $e/2mc$ в системе CGSE.

4.80. Атомное ядро можно рассматривать как вращающееся жесткое тело с угловым моментом $\mathbf{L}$ и магнитным моментом $\gamma\mathbf{L}$. Показать, что если на ядро действует магнитное поле $\mathbf{H}$, то вектор $\mathbf{L}$, независимо от величины угла между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$, прецессирует вокруг $\mathbf{H}$ с угловой частотой $\gamma\mathbf{H}$.

4.81. Вычислить механический и магнитный моменты атома водорода в основном состоянии.

4.82. Определить значения проекции механического и магнитного момента электрона на направление магнитного поля при орбитальном движении с орбитальным квантовым числом l (спин электрона не учитывать).

4.83. Пучок атомов натрия вылетает из печи, температура которой $T = 350$ К. Пучок расщепляется в поперечном неоднородном магнитном поле с градиентом $dB/dx = 50$ Тл/м на пути $l = 1$ см. Детектор удален от магнита на расстояние $L = 6,5$ см. Найти расстояние s между пятнами на экране.

4.84. Пучок атомов лития в основном состоянии с максимальной кинетической энергией $W_k = 0,1$ эВ проходит через магнит типа Штерна-Герлаха длиной $l = 6$ см с градиентом $dB/dx = 5$ Тл/см. Перед магнитом стоят две одинаковые диафрагмы S (рис. 4.6) на расстоянии $L = 1$ м одна от другой. При каком максимальном размере диафрагм компоненты разделенного пучка полностью разойдутся?

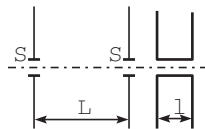


Рис. 4.6

4.85. Параллельный пучок нейтронов с энергией $E = 0,025$ эВ проходит через коллимирующую щель шириной $d = 0,1$ мм и затем через зазор в магните Штерна-Герлаха длиной $L = 1$ м. Оценить значение градиента поля dB/dz , при котором угол магнитного отклонения компонент пучка равен углу дифракционного уширения. Магнитный момент нейтрона примерно в 700 раз меньше магнетона Бора.

4.86. Объяснить, почему пучок атомов цинка, находящихся в основном состоянии, не испытывает расщепления в опыте Штерна-Герлаха.

4.87. Образец тефлона (полимера с химической формулой $(CF_2)_n$, где n — целое число) массой 50 г намагничивается в магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл при температуре $T = 0,05$ К. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора ^{19}F в магнитном поле на два подуровня. При выключении поля образец получает момент импульса $L = 24,2 \cdot 10^{-6}$ г·см²·с⁻¹ (аналог эффекта Эйнштейна и де Гааза в ферромагнетиках). Определить магнитный момент μ ядра фтора.

4.88. В опытах Шалла (1968 г.) наблюдалось расщепление пучка нейтронов на два пучка при преломлении на границе однородного магнитного поля. Найти угол θ между направлениями этих пучков. Индукция B однородного магнитного поля равна 2,5 Тл, а нейтроны с дебройлевской длиной волны $\lambda = 0,5$ нм падают под углом 30° к достаточно резкой границе магнитного поля.

4.89. Определить кратность вырождения уровня (число состояний с одинаковой энергией) для водородоподобного иона с главным квантовым числом 4, если а) не учитывать спин электрона, б) учитывать спин.

4.90. На сколько уровней расщепляется терм атома водорода с главным квантовым числом $n = 3$ в результате спин-орбитального взаимодействия?

4.91. Оценить длину волны λ излучения межзвездного атомарного водорода в радиодиапазоне. Межзвездный водород находится в основном состоянии, и его излучение обусловлено переориентацией спина электрона.

4.92. Оценить по порядку величины энергию расщепления ΔE головной линии серии Бальмера в спектре водорода за счет взаимодействия магнитных моментов электрона и ядра (сверхтонкое расщепление спектральных линий). Можно ли обнаружить это расщепление с помощью спектрального прибора, если среднее время жизни возбужденных атомов водорода порядка 10 нс?

7. Атом в магнитном поле

1. Расщепление уровней атомов в сильном магнитном поле B (простой эффект Зеемана):

$$\Delta E_B = (m + 2m_s)\mu_B B,$$

где m и m_s — квантовые числа проекций орбитального и спинового моментов электронной оболочки, μ_B — магнетон Бора. Соответствующее расщепление спектральной линии

$$\Delta\omega = (\Delta m + 2\Delta m_s) \frac{eB}{2m_e c} = 0, \pm \frac{eB}{2m_e c}.$$

Расщепление уровней в слабом магнитном поле (сложный эффект Зеемана):

$$\Delta E_B = \mu_B B g m_J, \quad g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

где g — фактор Ланде, m_J — квантовое число проекции полного момента (магнитное квантовое число). Расщепление спектральной линии в слабом поле

$$\Delta\omega = (m_J^{(1)} g_2 - m_J^{(2)} g_2) \frac{\mu_B B}{\hbar},$$

где $m_J^{(i)}$ и g_i — магнитные квантовые числа и факторы Ланде соответствующих подуровней. Правила отбора:

$$\Delta L = \pm 1, \quad \Delta S = 0, \quad \Delta J = 0, \pm 1,$$

$$\Delta m_L = 0, \pm 1, \quad \Delta m_S = 0, \quad \Delta m_J = 0, \pm 1;$$

при этом переходы $J = 0 \rightarrow J = 0$ запрещены; запрещены также переходы $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$, если $\Delta J = 0$. В сложных атомах возможны переходы $\Delta L = 0$ за исключением случаев, когда атом находится в состоянии с $L = 0$; кроме того переходы с $\Delta L = 0$ невозможны для атомов, электромагнитное излучение которых связано с изменением движения только одного электрона.

2. Спектроскопические обозначения термов: $2^{S+1}L_J$, при этом значениям квантового числа $L = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ сопоставляются латинские буквы S, P, D, F, G, H, I и далее по алфавиту.

4.93. Для наблюдения эффекта Зеемана кальциевая дуга помещена в магнитное поле напряженностью 20 000 Э и рассматривается спектральная линия $\lambda = 4226,7 \text{ \AA}$. Вычислить разность длин волн для смещенной и несмещенной компонент.

4.94. Сколько спектральных линий будет наблюдаться в переходе $^3D_1 \rightarrow ^2P_0$ в сильном и слабом магнитных полях?

4.95. Сколько спектральных линий будет наблюдаться в переходе $^5I_5 \rightarrow ^5H_4$ в сильном и слабом магнитных полях?

4.96. На сколько уровней расщепится в магнитном поле водородный терм с $n = 3$ при простом эффекте Зеемана? Какова разность энергий соседних уровней?

4.97. Найти зеемановское расщепление $\Delta\omega$ спектральной линии $^2D_{3/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$ в слабом поле. Указать число компонент в расщепленной линии.

4.98. Цезий принадлежит к числу щелочных металлов; при $P \rightarrow S$ переходе в атомарном цезии испускается широкий дублет, состоящий из двух линий: $\lambda_1 = 0,456 \text{ мкм}$ и $\lambda_2 = 0,459 \text{ мкм}$. Найти расщепление термов этого дублета в магнитном поле. Какими формулами описывается в этом случае расщепление линий в магнитном поле с индукцией $B = 3 \text{ Тл}$: формулами для простого или сложного эффектов Зеемана?

4.99. Оценить, какую индукцию B магнитного поля звезды типа Солнца (период вращения $\tau = 10^6 \text{ с}$, радиус $R = 108 \text{ м}$, температура поверхности $T = 6 \cdot 10^3 \text{ К}$) можно обнаружить в оптической области спектра $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ на основании измерения эффекта Зеемана.

4.100. Атомарный водород помещен в магнитное поле $B = 2 \text{ Тл}$ (много большее характерного поля атома). Определить максимальную дополнительную энергию, которую приобретает атом в состоянии с $n = 3$.

4.101. При переходе $P \rightarrow S$ из возбужденного состояния атома в основное испускается дублет $\lambda_1 = 455,1 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 458,9 \text{ нм}$. Какие линии, соответствующие переходу $^3S_{1/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$, будут наблюдаться в спектре поглощения газа, состоящего из таких атомов, при наложении магнитного поля $B = 50 \text{ кГс}$ при температуре $T = 0,5 \text{ К}$?

4.102. При наблюдении ядерного парамагнитного резонанса (ЯМР) на ядрах ^{25}Mg обнаружено резонансное поглощение излучения на частоте $\nu = 1,4 \text{ МГц}$ в поле $B = 5,4 \text{ кГс}$. Спин ядра ^{25}Mg равен $J = 5/2$. Найти магнитный момент и g-фактор ядра.

4.103. Найти частоту ЭПР для солей трехвалентного празеодима в магнитном поле $B = 0,1 \text{ Тл}$. На $4f$ -оболочке этого иона находятся два электрона, остальные оболочки заполнены.

Указание. По правилу Хунда в основном состоянии $J = L - S$, если заполнено меньше половины оболочки, и $J = L + S$, если больше половины.

8. Свойства атомных ядер

1. Радиус ядра с массовым числом A

$$R = 1,23A^{1/3} \text{ Фм.}$$

2. Энергия связи ядра с массовым числом A и зарядовым числом Z (полуэмпирическая формула Вайцзеккера):

$$E_{\text{св}} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2 A^{-1/3} - \varepsilon (A/2 - Z)^2 A^{-1} + \delta k A^{-3/4},$$

где константы имеют следующие значения (в МэВ):

$$\alpha = 14,03, \quad \beta = 13,03, \quad \gamma = 0,5835, \quad \varepsilon = 77,25, \quad \delta = 34,57,$$

$$k = \begin{cases} +1 & \text{для чётно-чётных ядер;} \\ 0 & \text{для нечётных } A; \\ -1 & \text{для нечётно-чётных ядер.} \end{cases}$$

4.104. Оценить, исходя из формулы для радиуса ядра, плотность ядерного вещества.

4.105. Оценить концентрацию нуклонов и объёмную плотность электрического заряда в ядре.

4.106. Определить, устойчиво ли ядро ${}^8\text{Be}$ относительно распада на две α -частицы, если известно, что энергии связи на один нуклон в ядрах ${}^8\text{Be}$ и ${}^4\text{He}$ равны, соответственно, 7,06 и 7,08 МэВ.

4.107. С помощью формулы Вайцзеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары при заданном A . Выяснить, каков характер активности у ядра ${}^{27}\text{Mg}$.

4.108. С помощью формулы Вайцзеккера найти минимальное значение параметра Z^2/A , при котором становится энергетически выгодным деление ядра с чётными A и Z на две одинаковые части.

4.109. Разница в энергии связи ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ обусловлена энергией электростатического взаимодействия протонов. Оценить размеры ядра ${}^3\text{He}$, если его энергия связи составляет 7,7 МэВ, а энергия связи ядра ${}^3\text{H}$ — 8,5 МэВ.

4.110. Оценить высоту кулоновского потенциального барьера для α -частиц, испускаемых ядрами ${}^{222}\text{Rn}$. Какова у этих ядер ширина барьера («туннельное расстояние») для α -частиц, вылетающих с кинетической энергией 5,5 МэВ?

4.111. Предполагая, что α -частица находится в ядре в качестве самостоятельной частицы, оценить на основе соотношения неопределённостей приближённую зависимость постоянной распада λ от коэффициента прозрачности D кулоновского барьера и радиуса ядра R .

4.112. Определить порядковый номер и массовое число иония, получающегося из урана-238 (^{238}U) в результате двух α - и двух β -распадов. Изотопом какого элемента является ионий?

4.113. Показать, что в составе атомного ядра не может быть электронов.

4.114. Волновая функция основного состояния дейтрона в системе центра масс имеет вид $\psi(r) \propto r^{-1} \exp(-\alpha r)$, где $\alpha = 2,2 \times 10^{12} \text{см}^{-1}$. Определить красную границу фоторасщепления дейтрона, т.е. расщепления дейтрона γ -квантами.

4.115. В 1942 году американский физик Аллен измерил максимальную энергию E_0 атомов ^7Li , образующихся в результате К-захвата ^7Be , и она оказалась равной 50 эВ. Оценить на основе этих данных разность масс атомов ^7Li и ^7Be .

4.116. Простейшей оболочечной моделью ядра является трехмерный гармонический осциллятор. Считая, что такая потенциальная яма имеет глубину $U_0 = 70 \text{ МэВ}$, а $U(R_0) = 0$, где R_0 — эффективный радиус ядра, оценить энергию связи нуклона для ядра кислорода $^{16}_8\text{O}$.

4.117. На спектрометре высокого разрешения GAMS4 в Гренобле у изотопа ^{49}Ti зарегистрирован каскадный переход из высоковозбужденного в основное состояние с последовательным испусканием двух гамма-квантов с энергиями $E_1 = 5 \text{ МэВ}$ и $E_2 = 1,5 \text{ МэВ}$. Прецизионные измерения формы линии E_2 показали, что она имеет ширину $\Delta E = 400 \text{ эВ}$. Оценить время жизни уровня с энергией E_2 .

9. Ядерные реакции. Деление

1. Эффективное сечение процесса взаимодействия

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{jN_{\text{я}}},$$

где $\dot{N}$ — число актов взаимодействия в единицу времени, j — плотность потока падающих частиц, $N_{\text{я}}$ — число ядер мишени на площади, перекрытой пучком (строго говоря, это определение справедливо для тонкой мишени, т.е. такой мишени, в которой не происходит заметного ослабления пучка падающих частиц).

2. Ослабление интенсивности падающего пучка на глубине x мишени

$$j(x) = j_0 \exp(-n\sigma x),$$

где n — плотность ядер, с которыми происходит взаимодействие, в мишени.

3. Эффективное сечение резонансной реакции (формула Брейта-Вигнера):

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_e \Gamma_a}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2},$$

где k — волновое число падающей частицы (в системе центра масс), E — энергия падающей частицы, E_0 — ее энергия, соответствующая уровню составного ядра (энергия резонанса), Γ_e — парциальная ширина упругого рассеяния, Γ_a — парциальная ширина рассматриваемого процесса, $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ — полная ширина уровня составного ядра, g — статистический фактор:

$$g = \frac{2J+1}{(2j_1+1)(2j_2+1)},$$

где J — спин уровня составного ядра, j_1 и j_2 — спины налетающей частицы и ядра-мишени.

4.118. Частица массы m налетает со скоростью $v \ll c$ на покоящееся ядро массы M , возбуждая эндотермическую ядерную реакцию (Q — энергия реакции). Показать, что пороговая кинетическая энергия налетающей частицы равна

$$E_{\text{пор}} = \frac{m+M}{M}|Q|.$$

4.119. Используя результат предыдущей задачи, вычислить пороговую кинетическую энергию налетающего протона в реакции $p + {}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n$.

4.120. В реакции термоядерного синтеза $d + t = \alpha + n + Q$ выделяется энергия $Q = 17,8$ МэВ. Какова энергия, уносимая нейтроном?

4.121. Узкий пучок γ -лучей с энергией 150 кэВ при прохождении серебряной пластинки толщиной 3 мм ослабляется в четыре раза. Найти эффективное сечение взаимодействия (в барн/атом) этих γ -квантов в серебре.

4.122. Выразить эффективное сечение реакции $A(a, b)$, зная сечение образования составного ядра σ_a и ширины Γ и Γ_b его уровня, через который идет реакция. Здесь Γ — полная ширина уровня, а Γ_b — парциальная ширина, отвечающая испусканию частицы b .

4.123. Оценить величину сечения взаимодействия нейтрона с энергией 10 МэВ с ядрами Au.

4.124. Поток нейтронов из обычного реактора $\nu = 10^{14} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$. Определить скорость реакции в мишени толщиной 1 см. Поперечное сечение реакции $\sigma = 10^{-27} \text{ см}^{-2}$, плотность ядер мишени $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

4.125. Для регистрации медленных нейтронов широко используются счетчики, наполненные газообразным ${}^3\text{He}$. Счетчик представляет собой цилиндр диаметра $D = 25$ мм, наполненный газом при давлении 10 атм. и температуре 300 К. В счетчике происходит реакция ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$, сечение которой для регистрируемых нейтронов равно $\sigma = 5400$ барн. Рассчитать долю регистрируемых нейтронов, предполагая, что нейтроны в счетчике движутся вдоль его диаметра.

4.126. Найти среднее эффективное сечение σ реакции $\alpha + {}_{13}^{27}\text{Al} \rightarrow p + {}_{14}^{30}\text{Si}$. Известно, что при облучении толстой алюминиевой мишени α -частицами с энергией 8 МэВ выход протонов равен $\eta = 8 \cdot 10^{-6}$. Длина пробега α -частиц в воздухе $l_B = 7,0$ см. Выходом ядерной реакции называется отношение числа актов реакции к числу падающих частиц.

4.127. Толстая мишень, содержащая n ядер/см³, облучается α -частицами. Зависимость дифференциального выхода исследуемой реакции от энергии α -частиц в интервале 1–10 МэВ оказалась квадратичной, т.е. $d\eta/de = kE^2$. Определить приближенно характер зависимости эффективного сечения реакции от энергии $\sigma(E)$. При этом в выражении для ионизационных потерь энергии пренебречь логарифмическим и релятивистским членами, т.е. считать, что $de/dx = A/E$, где A — некоторая постоянная.

4.128. Реакция термоядерного синтеза $d + t \rightarrow n + \alpha$ идет при низких энергиях преимущественно при столкновениях ядер с полным моментом импульса $J = 3/2$. Во сколько раз изменится среднее сечение этой реакции, если дейтериево-тритиевая плазма помещена в магнитное поле, полностью поляризующее спины взаимодействующих ядер?

4.129. Поток нейтрино ν_e с энергией $E = 10$ МэВ проходит через Землю. Оценить вероятность поглощения нейтрино веществом Земли, считая, что вещество Земли содержит 50% протонов и 50% нейтронов. Сечение взаимодействия таких нейтрино $\sigma_\nu = 10^{-41}$ см², масса Земли $M = 6 \cdot 10^{27}$ г, радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^8$ м. Какова длина свободного пробега этих нейтрино во Вселенной? Плотность межзвездного газа $\rho = 2 \cdot 10^{-26}$ г/см³. Нейтрино с указанной энергией взаимодействуют только с нейтронами.

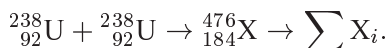
4.130. Мюон, попав в свинцовую пластинку, очень быстро тормозится, после чего захватывается на К-оболочку Рb, на которой живет $7 \cdot 10^{-8}$ с. Это время примерно в 30 раз меньше времени жизни свободного мюона. Взаимодействие с каким нуклоном ограничивает время жизни мюона? Какова соответствующая реакция? Дать оценку ее сечения.

4.131. Время жизни ядра ${}_{18}^{37}\text{Ar}$ в результате К-захвата составляет $T = 32$ дня. Оценить эффективное сечение слабого взаимодействия в реакции $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

4.132. При комнатной температуре примерно 20% γ -распадов ${}^{119}\text{Sn}$ в соединении BaSnO_3 происходит без отдачи (эффект Мессбауера). Оценить, какой должна быть толщина L источника, чтобы в нем не происходило заметного поглощения мессбауеровских γ -квантов. Плотность BaSnO_3 $\rho = \text{г/см}^3$, содержание изотопа ${}^{119}\text{Sn}$ в естественной смеси $\varepsilon = 8\%$, энергия γ -квантов $E_\gamma = 24$ кэВ.

4.133. Исследование структуры жидкого и твердого ${}^3\text{He}$ с помощью пропускания нейтронов через слой вещества затруднено из-за большой величины сечения экзотермической реакции ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$, которое для нейтронов с энергией 300 К равно 5400 бн. Определить энергию нейтронов, с помощью которых можно изучать слои ${}^3\text{He}$ толщиной 1 мм, чтобы через них проходило не менее 10% от потока падающих нейтронов. Концентрация ядер ${}^3\text{He}$ $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Сечение указанной реакции для нейтронов с энергией до 1 МэВ носит нерезонансный характер.

4.134. Одним из перспективных методов получения новых изотопов является синтез тяжелых ядер с их последующим распадом. Найти пороговую скорость v ядер урана, бомбардирующих урановую мишень, для реакции



4.135. Сечение деления урана-238 γ -квантами с энергией 3 МэВ составляет 0,1 нб (10^{-34} см^2). Каков должен быть полный поток падающих на мишень квантов, чтобы можно было заметить вынужденное деление в 1 мг ${}^{235}\text{U}$ на фоне спонтанного деления ($T_{1/2} = 10^{15}$ лет) при продолжительности эксперимента $t = 100$ час?

4.136. Ядерный реактор с топливом из ${}^{235}\text{U}$ работает в стационарном режиме. В среднем половина рождающихся нейтронов захватывается конструкционными материалами и самим ураном. Какова доля нейтронов, уходящих из активной зоны, если при элементарном акте деления урана рождается в среднем $\nu = 2,5$ быстрых нейтронов?

4.137. Реактивностью реактора называют величину $\rho = (k - 1)/k$, где k — коэффициент размножения нейтронов; если $|k - 1| \ll 1$, то $\rho \approx k - 1$. Найти в этом приближении изменение мощности $P(t)$ реактора в надкритическом режиме, когда $k > 1$. Определить период T реактора, т.е. время возрастания мощности P в e раз. Среднее время жизни одного поколения нейтронов равно τ . Как изменится мощность при увеличении температуры от 1 кэВ до 10 кэВ?

4.138. В первом поколении термоядерных реакторов предполагается использовать реакцию дейтерия с тритием: $d + t \rightarrow {}^4\text{He} + n + 17,6 \text{ МэВ}$. Величина $\overline{\sigma v}$ (где σ — сечение реакции, а v — относительная скорость реагирующих частиц), усредненная по максвелловскому распределению, равна

$$\overline{\sigma v} = 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2/\text{с} \quad \text{при} \quad T = 1 \text{ кэВ}$$

$$\overline{\sigma v} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{с} \quad \text{при} \quad T = 10 \text{ кэВ}.$$

Предполагая, что плазма содержит равное количество атомов дейтерия и трития, рассчитать плотность P тепловой мощности и полную мощность W термоядерной установки, если объем плазмы 500 м^3 , плотность электронов $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

10. Элементарные частицы

1. Релятивистский инвариант для системы частиц:

$$E^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = \text{inv},$$

где E и $\mathbf{P}$ — полная энергия и полный импульс системы. Пороговая кинетическая энергия частицы m_1 для реакции $m_1 + m_2 \rightarrow \sum m'_i$ (частица m_2 покоится):

$$T_{\text{пор}} = \frac{(\sum m'_i)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}$$

4.139. Чему равно наибольшее число пионов, которое может быть образовано при столкновении протона с энергией $W_p = 5$ ГэВ с покоящимся протоном?

4.140. Определить пороговое значение энергии π -мезонов для реакции $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$.

4.141. Вычислить энергетический порог рождения антипротона в pp -соударениях, считая протоны в мишени неподвижными. При написании возможных реакций учесть закон сохранения барионного заряда.

4.142. Рассмотрев законы сохранения энергии и импульса, доказать, что в вакууме невозможен процесс образования фотоном электрон-позитронной пары.

4.143. Показать невозможность аннигиляции электрона и позитрона с испусканием одного γ -кванта.

4.144. На основании законов сохранения барионного заряда и странности определить, какие из приведенных реакций возможны:

1) $\pi^0 + n \rightarrow K^+ + K^-$; 2) $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda^0$;

3) $p + p \rightarrow p + \tilde{K}^0 + K^+$.

4.145. Рассмотреть, какие из приведенных реакций запрещены законами сохранения лептонных зарядов:

1) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu$; 2) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e$;

3) $\mu^+ \rightarrow e^- + \gamma$; 4) $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^0$;

5) $\nu_e + p \rightarrow n + e^+$.

4.146. В эффективном сечении упругого процесса $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ при кинетической энергии налетающего пиона $T_\pi = 190$ МэВ (в лабораторной системе координат) наблюдается резонанс с полушириной $\Gamma/2 = 100$ МэВ, который называется Δ^{++} -изобарой. Определить время жизни и массу этой частицы.

4.147. Нуклонный резонанс $N(1520)$ с массой $M = 1520$ МэВ образуется при рассеянии пиона на протоне. Оценить эффективное сечение этого процесса.

4.148. Определить минимальную кинетическую энергию нейтрона, при столкновении которого с ядром водорода в жидководородной мишени образуется лямбда-частица.

4.149. Мезонные резонансы ψ и ψ' с массами 3,1 ГэВ и 3,7 ГэВ можно считать, соответственно, основным и первым возбужденным состояниями в системе очарованных кварков. Пользуясь нерелятивистским приближением и считая, что потенциал взаимодействия кварков $V = -q^2/r$, оценить характерный размер ψ -мезона.

4.150. Построить кварковую схему нейтрального каона.

4.151. Построить кварковую схему Ξ^0 и Λ^0 -гиперонов.

4.152. Исходя из кварковой модели, определить странность S и гиперзаряд Y адрона, электрический заряд которого $q = 1$, проекция изотопического спина $I_3 = 0$, а барионный заряд $B = 1$. Что это за частица?

4.153. Исходя из кварковой модели, определить странность S и гиперзаряд Y нейтрального адрона, проекция изотопического спина которого $I_3 = +1/2$, а барионный заряд $B = -1$. Что это за частица?

4.154. Возможны ли следующие распады частиц и если нет, то по какой причине:

- 1) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$; 2) $\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$;
- 3) $n \rightarrow p + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$; 4) $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_\mu$;
- 5) $p \rightarrow \mu^+ + \tilde{\nu}_\mu$; 6) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \mu^-$?

4.155. Исходя из кварковой модели, дописать следующие реакции с участием мюонного нейтрино:

- 1) $\nu_\mu + p \rightarrow ?$; 2) $\nu_\mu + n \rightarrow ?$;
- 3) $\tilde{\nu}_\mu + p \rightarrow ?$; 4) $\tilde{\nu}_\mu + n \rightarrow ?$.

Каково отношение эффективных сечений этих реакций?

4.156. При больших энергиях полное сечение рассеяния pp примерно постоянно и равно 40 мбн. Принимая во внимание кварковую структуру протона и пиона, оценить, какой будет в этих условиях величина полного сечения рассеяния πp . Считая, что для каон-нуклонного рассеяния $\sigma(KN) = 19$ мбн, оценить сечения рассеяния ΛN и ΞN .

4.157. Магнитные моменты кварков определяются, как и для электрона, формулой

$$\mu_q = \frac{e\hbar}{2m_q c} Q_q,$$

где m_q и Q_q — масса и заряд кварка. Каков магнитный момент бариона Ω ?

4.158. При столкновении встречных протон-антипротонных пучков возможно рождение W^+ -бозона. Написать эту реакцию на кварковом уровне. Оценить пороговую энергию протонов, если известно, что импульс нуклона распределяется между кварками и глюонами в соотношении 0,45 : 0,55. Масса W^+ -бозона $M_W = 80,6$ ГэВ.

Г л а в а V

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Элементы молекулярно-кинетической теории

1. Уравнение состояния идеального газа:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT,$$
$$P = nk_B T,$$

где P — давление, V — объем, m — масса газа, μ — относительная молярная масса, ν — число молей, T — температура, R — универсальная газовая постоянная, n — концентрация молекул.

2. Соотношение между частными производными:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1.$$

3. Закон Фика для плотности потока (числа частиц, пересекающих единицу поверхности в единицу времени):

$$I \equiv \frac{d^2 N}{dS dt} = -D \operatorname{grad} n,$$

где D — коэффициент диффузии.

4. Закон Ньютона (зависимость тангенциального напряжения в направлении оси x от скорости направленного движения u):

$$\tau_x = -\eta \frac{du_x}{dy},$$

где η — коэффициент вязкости (динамический).

5. Закон Фурье для плотности потока тепла:

$$q \equiv \frac{d^2 Q}{dS dt} = -\kappa \operatorname{grad} T,$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

6. Зависимость средней длины свободного пробега от сечения столкновения молекул σ :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}.$$

7. Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

где ρ — плотность, c — удельная теплоемкость.

8. Коэффициенты переноса в газах

$$D = \chi = \nu = \frac{\lambda \langle v \rangle}{3},$$

где $\chi = \kappa / \rho c$ — коэффициент температуропроводности; $\nu = \eta / \rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение состояния. Идеальный газ

5.1. Доказать, что коэффициент объемного расширения α , температурный коэффициент давления λ и изотермическая сжимаемость β физически однородного и изотропного тела связаны соотношением

$$V_0 \alpha = P_0 V \lambda \beta,$$

где V_0 и P_0 — объем и давление тела при 0°C .

5.2. Вычислить для идеального газа следующие величины: коэффициент объемного расширения α , температурный коэффициент давления λ , изотермическую сжимаемость β_T , изотермический модуль объемной упругости $K_T = -V(\partial P / \partial V)_T$. (См. зад. 5.1)

5.3. При нагреве моля идеального газа на $\Delta T = 1 \text{ K}$ при постоянном объеме давление возрастает на $\Delta P = 10 \text{ Па}$. Если при том же исходном состоянии нагреть газ на 1 K при постоянном давлении, объем Q увеличится на $\Delta V = 1 \text{ дм}^3$. Определить параметры исходного состояния газа.

5.4. Натянутый резиновый шнур при увеличении силы натяжения на $\Delta f = 1 \text{ Н}$ изотермически растягивается на $\Delta l = 1 \text{ см}$. Шнур нагрели, и его длина уменьшилась на $\Delta l' = 4 \text{ см}$. Как надо изменить натяжение, чтобы при новой температуре длина шнура оказалась равной исходной?

5.5. Коэффициент объемного расширения ртути α при 0°C и атмосферном давлении равен $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Сжимаемость $\beta = 3,9 \times 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$. Вычислить температурный коэффициент давления λ для ртути.

5.6. До какой температуры нужно нагреть запаянный шар, содержащий $m = 17,5 \text{ г}$ воды, чтобы он разорвался, если известно, что стенки шара выдерживают давление не более $P = 10^7 \text{ Па}$, а его объем $V = 1 \text{ дм}^3$.

5.7. Перед вылетом пули из ствола винтовки объем, занимаемый пороховым газом (продуктами сгорания пороха), в $n = 100$ раз превышает объем твердого пороха. Температура газов в этот момент $T = 1000 \text{ К}$. Молярная масса продуктов сгорания $\mu = 30 \text{ г/моль}$, плотность твердого пороха $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$. Определить давление пороховых газов при вылете пули.

5.8. Баллончик для приготовления газированной воды имеет объем $V = 5 \text{ см}^3$ и содержит углекислый газ CO_2 под давлением

$P = 15$ атм. Можно ли на весах чувствительности $m_0 = 10$ мг заметить разницу в массах полного и «пустого» баллончиков?

5.9. Шаровая молния представляет собой слабо светящийся газовый шар, свободно плавающий в воздухе. Обычно она наблюдается после грозы. Согласно одной из моделей молния состоит из идеального газа, представляющего собой комплексное соединение, каждая молекула которого содержит ион азота, связанный с несколькими молекулами воды. Температура молнии $t = 600^\circ\text{C}$, температура окружающего воздуха $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Сколько молекул воды связывает каждый ион азота? Электроны, потерянные атомом азота, связаны с молекулами воды, так что комплексная молекула остается в целом нейтральной.

5.10. Температура комнаты была $t_1 = 10^\circ\text{C}$. После того, как протопили печь, температура в комнате поднялась до $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Объем комнаты $V = 50\text{ м}^3$, давление в ней $P = 97$ кПа. На сколько изменилась масса воздуха, находящегося в комнате?

5.11. Масса M_τ пороха, сгорающего в единицу времени в камере ракетного двигателя, зависит от давления P по закону $M_\tau = AP^n$. Найти показатель степени n , если при уменьшении сечения сопла двигателя в 2 раза давление в камере возрастает в 4 раза. Скорость истечения газа из сопла пропорциональна давлению в камере P .

5.12. В камере сгорания реактивного двигателя объемом $V = 0,1\text{ м}^3$ при температуре $T = 2000\text{ К}$ давление $P = 1,5 \cdot 10^6$ Па. Скорость сгорания топлива $M_\tau = 30$ кг/с, средняя молярная масса продуктов сгорания $\mu = 21$ г/моль. Определить время пребывания топлива в камере сгорания.

5.13. Определить массу воздуха m , заключенного между двумя оконными рамами при атмосферном давлении P , считая, что температура между рамами меняется по линейному закону от T_1 до T_2 ($T_2 > T_1$). Площадь окна равна S , расстояние между ними — l .

5.14. Сосуд разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой. В первую половину сосуда введена смесь аргона и водорода при давлении $P = 1,5 \cdot 10^5$ Па, во второй половине вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. После окончания процесса диффузии давление в первой половине оказалось равным $P' = 10^5$ Па. Во время процесса температура поддерживалась постоянной. Определите отношение масс аргона и водорода в смеси, которая была первоначально введена в первую половину сосуда.

5.15. Под тяжелый поршень, скользящий без трения внутри вертикального откачанного сосуда, вводится смесь водорода и гелия, в результате чего поршень располагается посередине сосуда. С течением времени поршень смещается вниз, так как материал, из которого он изготовлен, оказался проницаемым для одного из газов — гелия. Окончательное положение равновесия поршня находится на $1/3$ высоты цилиндра. Каково отношение масс водорода и гелия в смеси?

5.16. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T , когда азот полностью диссоциировал на атомы, а диссоциа-

цией водорода еще можно пренебречь, давление в сосуде равно P . При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциировали, давление в сосуде равно $3P$. Каково отношение чисел атомов азота и водорода в смеси?

5.17. В сосуде постоянного объема находится кислород (O_2). После того, как в сосуде был осуществлен электрический разряд, половина молекул кислорода распалась на атомы, а температура газа выросла вдвое. Как изменилось давление?

5.18. В сосуде вместимостью $V = 1 \text{ дм}^3$ находится углекислый газ массой $m = 0,2 \text{ г}$. При температуре $T = 2600 \text{ К}$ некоторая часть молекул CO_2 диссоциировала на молекулы оксида углерода и кислорода: $2CO_2 \rightleftharpoons 2CO + O_2$. При этом давление в сосуде оказалось равным $P = 108 \text{ кПа}$. Найдите степень диссоциации CO_2 при этих условиях.

5.19. Серный ангидрид в количестве $\nu_1 = 1$ моль поместили в замкнутый сосуд и нагрели до температуры $T_1 = 1000 \text{ К}$, при которой он частично диссоциировал на сернистый ангидрид и кислород: $SO_3 = SO_2 + 0,5O_2$. Степень диссоциации SO_3 в этих условиях оказалась равной $\alpha_1 = 0,2$. Когда в тот же сосуд поместили $\nu_2 = 0,4$ моль SO_3 , то для получения такого же, как в первом опыте, давления газ пришлось нагреть до температуры $T_2 = 2000 \text{ К}$. Определить степень диссоциации SO_3 во втором опыте. Все вещества находятся в газообразном состоянии.

5.20. Рассчитать число молекул в 1 дм^3 воздуха при нормальных условиях (температура $T = 273 \text{ К}$, давление $P = 101325 \text{ Па}$).

5.21. В комнате вместимостью $V = 60 \text{ м}^3$ испарили капельку духов, содержащую $m = 10^4 \text{ г}$ ароматического вещества. Сколько молекул ароматического вещества попадает в легкие человека при каждом вдохе? Объем вдыхаемого воздуха $V_B = 1 \text{ дм}^3$. Молярная масса ароматического вещества $\nu = 1 \text{ кг/моль}$.

5.22. При взрыве атомной бомбы ($M = 1 \text{ кг}$ плутония ^{242}Pu) получается одна радиоактивная частица на каждый атом плутония. Предполагая, что ветры равномерно перемешивают эти частицы во всей атмосфере, подсчитать число радиоактивных частиц, попадающих в объем $V = 1 \text{ дм}^3$ воздуха у поверхности Земли. Радиус Земли принять равным $R = 6 \cdot 10^6 \text{ м}$.

5.23. Найдите среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при температуре $t = 100^\circ \text{ С}$.

Явления переноса

5.24. Стальной стержень длины $l = 20 \text{ см}$ с площадью поперечного сечения $S = 3 \text{ см}^2$ нагревается с одного конца до температуры $t_1 = 300^\circ \text{ С}$, а другим концом упирается в лед. Предполагая, что передача тепла происходит исключительно вдоль стержня (без потерь через стенки), подсчитать массу m льда, растаявшего за время $\tau = 10 \text{ мин}$. Теплопроводность стали $\kappa = 0,16 \text{ кал/(с·см·К)}$.

5.25. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 заполнено проводящим тепло однородным веществом. Найти распределение температуры в этом пространстве, если температура внутреннего цилиндра t_1 , а внешнего — t_2 .

5.26. Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2 , заполненным проводящим тепло однородным веществом, если температуры обеих сфер постоянны и равны t_1 и t_2 .

5.27. Спутник сечением $S = 1 \text{ м}^2$ движется с первой космической скоростью $v = 7,9 \text{ км/с}$ по околоземной орбите. Давление воздуха на высоте орбиты ($h = 200 \text{ км}$) $P = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ Па}$, температура $T = 1226 \text{ К}$. Определите число столкновений спутника с молекулами воздуха в единицу времени.

5.28. Оцените длину свободного пробега молекулы в воздухе при нормальных условиях. Диаметр молекулы $d = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

5.29. Сколько столкновений z испытывает в среднем молекула CO_2 за одну секунду при нормальном давлении и температуре? Газокинетический диаметр молекулы CO_2 равен $d = 10^{-7} \text{ см}$.

5.30. Сколько столкновений z происходит каждую секунду в 1 см^3 между молекулами кислорода, находящегося при нормальных условиях? Газокинетический диаметр молекулы кислорода $d = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

5.31. В настоящее время в околоземном пространстве находится примерно $N \approx 10^3$ рукотворных тел (спутники, обломки аварий и т.д.). Принимая толщину «заселенного» слоя атмосферы равной $h = 100 \text{ км}$, а характерный размер объектов — $l = 1 \text{ м}$, оценить «время жизни» отдельного тела. Считать, что тела «вымирают» только в результате взаимных столкновений, т.е. торможение в атмосфере не учитывать. Оценить также время между столкновениями любых двух рукотворных тел — насколько часто вообще должны происходить столкновения в околоземном пространстве.

5.32. На очень большом гладком поле лежит большое количество — $N \gg 1$ бильярдных шаров. Шары расположены случайным образом, но в среднем равномерно заполняя некоторый круг и при этом не касаясь друг друга. В это скопление внедряется со стороны со скоростью v такой же шар, запутывается и приводит в движение весь массив. Оценить по порядку величины время, по истечении которого шары прекратят сталкиваться друг с другом. Радиус каждого шара равен r .

5.33. Идеальный газ нагревают при постоянном давлении. Как изменяются длина свободного пробега λ и число z столкновений его молекул в единицу времени с изменением температуры?

5.34. Идеальный газ сжимают изотермически. Найти зависимости λ и z от давления.

5.35. Найти стационарное распределение температуры в идеальном газе между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами, расположенными на расстоянии L друг от друга. Температуры пластин T_1 и $T_2 > T_1$ поддерживаются постоянными. Зависимостью эффективного сечения столкновения молекул от температуры пренебречь.

5.36. По оси длинного цилиндра, заполненного идеальным газом, расположена тонкая проволока радиуса r , по которой течет ток. При этом выделяется постоянная мощность на единицу длины q . Температура T_0 внешнего цилиндра поддерживается постоянной, его радиус R . Найти разность температур ΔT между нитью и цилиндром, учитывая зависимость коэффициента теплопроводности газа от температуры. При температуре T_0 теплопроводность известна и равна κ_0 .

5.37. Сфера радиуса R имеет постоянную температуру T_0 и находится в бесконечной среде идеального газа. На большом удалении от сферы температура газа пренебрежимо мала по сравнению с T_0 . Определить тепловую мощность q которая подводится к сфере. Учесть зависимость теплопроводности газа от температуры. При температуре T_0 коэффициент теплопроводности равен κ_0 .

5.38. В цилиндрическом сосуде находится идеальный газ при температуре T_0 и давлении P_0 . Боковые стенки сосуда — теплоизолирующие. Крышку сосуда нагревают до температуры $T = 4T_0$, а температура дна поддерживается равной T_0 . Определите установившееся давление в сосуде.

5.39. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ при температуре T_0 . Боковые стенки сосуда не пропускают тепла. Поршень сосуда нагревают до $T = 9T_0$, а температура дна поддерживается равной T_0 . Во сколько раз изменится первоначальный объем после установления стационарного режима теплопередачи. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Внешнее давление постоянно.

5.40. Цилиндрический сосуд длины L , боковые стенки которого не проводят тепло, а торцы — проводят, зажат между тепловыми резервуарами с температурами T_1 и T_2 (рис. 5.1). Внутри сосуда находится тонкий поршень, проводящий тепло, по обе стороны от которого в сосуде содержится по одному молю идеального газа. Определить, какое положение займет поршень после установления равновесия. Теплопроводность газа считать во всем объеме одинаковой.

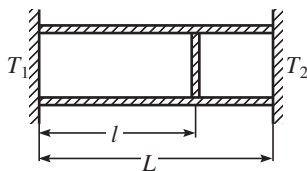


Рис. 5.1

5.41. При нагреве азота N_2 практически все молекулы диссоциировали на атомы, и в результате коэффициент самодиффузии D вырос в 3 раза. Как изменился коэффициент теплопроводности κ ?

5.42. При нагреве кислорода O_2 под постоянным давлением от температуры T до температуры $T_1 = 4T$ практически все молекулы диссоциировали на атомы. При этом коэффициент вязкости вырос вдвое. Как изменился коэффициент диффузии?

5.43. Димер аргона Ar_2 можно рассматривать как двухатомную молекулу, которая состоит из двух атомов аргона, соединенных межмолекулярными связями. При нагреве такого газа от температуры T_0 до температуры $T = 4T_0$ димер распадается на атомы. Сечение столкновения атомов в $k = 1,6$ раза меньше сечения

столкновения молекул Ar_2 . Во сколько раз в результате нагрева изменился коэффициент теплопроводности газа?

5.44. При низкой температуре T_0 молекулы связаны в пары межмолекулярными силами — образуют ассоциат. При нагреве до температуры $T = 2T_0$ ассоциат распадается на молекулы. Сечение столкновения молекул в $k = 1,5$ раза меньше сечения столкновения ассоциатов. Определите, во сколько раз коэффициент самодиффузии молекул при температуре T отличается от коэффициента самодиффузии ассоциатов при температуре T_0 , если давления в обоих случаях одинаковы.

5.45. При нагреве азота N_2 от температуры T до температуры $T_1 = 4T$ практически все молекулы диссоциировали на атомы, а коэффициент теплопроводности вырос втрое. Как отличается сечение столкновения атомов азота от сечения столкновения молекул?

5.46. При нагреве кислорода O_2 под постоянным давлением от температуры T до температуры $T_1 = 4T$ практически все молекулы диссоциировали на атомы, и коэффициент диффузии вырос в 16 раз. Как отличается сечение столкновения атомов кислорода от сечения молекул?

5.47. В шине электропроводки, выполненной в виде широкой пластины толщины $2d$, в результате протекания тока в каждой единице объема выделяется в единицу времени количество теплоты q . Найти установившееся распределение температуры по толщине шины. Температура внешних поверхностей поддерживается равной T_0 . Теплопроводность материала шины пропорциональна температуре: $\kappa = AT$.

5.48. Урановый шар радиуса $R = 10$ см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия $q = 100 \text{ Вт/см}^3$. Температура воды $T_0 = 373 \text{ К}$, теплопроводность урана $\kappa = 400 \text{ Вт/(м·К)}$. Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

5.49. Определить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии $h = 1$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 50 \text{ рад/с}$ второй такой же диск. Радиус дисков $R = 10 \text{ см}$, модуль кручения нити $f = 100 \text{ дин·см/рад}$, вязкость воздуха считать равной $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ дин·с/см}^2$. Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.

2. Элементы термодинамики

1. Первое начало термодинамики: подведенное к системе тепло идет на изменение внутренней энергии системы и на работу:

$$Q = \Delta U + A.$$

2. Теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

3. Соотношение между теплоемкостями при постоянном давлении C_P и при постоянном объеме C_V

$$C_P - C_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right].$$

4. Уравнение политропы идеального газа:

$$PV^{\left(\frac{C - C_P}{C - C_V} \right)} = PV^n = \text{const.}$$

5. Адиабата Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

6. Скорость истечения газа

$$v = \sqrt{\frac{2C_P(T_1 - T_2)}{\mu}}.$$

7. Скорость звука в газе

$$s = \sqrt{\left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{ад}}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

8. Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \equiv \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

9. КПД цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

10. Энтропия (приведенная теплота в обратимом процессе):

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{об}}.$$

11. Неравенство Клаузиуса:

$$\frac{\delta Q}{T} \leq dS.$$

12. Энтропия идеального газа

$$S = \nu[C_V \ln T + R \ln(V/\nu) + S_0].$$

13. Термодинамические потенциалы:

внутренняя энергия	$U;$	$dU = TdS - PdV;$
энтальпия	$H = U + PV;$	$dH = TdS + VdP;$
свободная энергия	$F = U - TS;$	$dF = -SdT - PdV;$
потенциал Гиббса	$\Phi = U + PV - TS;$	$d\Phi = -SdT + VdP.$

14. Константа химической реакции в газовой фазе (для ограниченного диапазона изменения параметров):

$$K_P(T) = \prod_i P_i^{-n_i} = K e^{-Q_P/RT}$$

(пояснение обозначений — в решении зад. 5.98)

15. Формула Ричардсона для тока насыщения вакуумного диода:

$$I_n(T) = AT^2 \cdot e^{-W/k_B T},$$

где W — работа выхода электрона.

I начало термодинамики

5.50. В вертикальном теплоизолированном цилиндре может перемещаться тяжелый поршень. Вначале поршень закреплен; над поршнем — вакуум, под ним — воздух. Затем поршень освобождается. После установления равновесия объем, занимаемый воздухом, оказался вдвое меньше первоначального. Как изменилась температура воздуха? Молярную теплоемкость воздуха считать равной $C_V = 5R/2$.

5.51. В теплонепроницаемом сосуде под поршнем находится один моль идеального одноатомного газа при температуре T_0 . В некоторый момент времени давление на поршень мгновенно увеличивается в два раза. После установления равновесия давление также мгновенно уменьшается, возвращаясь к первоначальному значению. Определить конечную температуру газа.

5.52. Один моль идеального двухатомного газа находится в цилиндре под поршнем, на котором стоит гиря. Температура газа T_0 . Гирю снимают с поршня, и после установления равновесия давление в сосуде оказывается в 3 раза меньше начального. После этого гирю возвращают на место. Определите конечную температуру газа.

5.53. В хорошо откачанной вакуумной системе открывают кран, соединяющий ее с атмосферой. Сразу после уравнивания давлений кран закрывают. Каким окажется давление в системе после установления теплового равновесия с окружающим воздухом?

5.54. 1. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $PV^2 = \text{const}$? 2. Какова его молярная теплоемкость в этом процессе?

5.55. Решить предыдущую задачу для идеального газа, расширяющегося по закону $P^2V = \text{const}$.

5.56. Вычислить работу одного моля идеального газа в политропическом процессе, если объем газа изменяется от начального значения V_1 до конечного значения V_2 . Рассмотреть частные случаи изотермического и адиабатического процессов.

5.57. Найти в координатах (V, T) уравнение процесса для идеального газа, при котором молярная теплоемкость газа меняется с

температурой по линейному закону $C = C_0 + \alpha T$, где α — некоторая постоянная. Рассмотреть частный случай $C_0 = 0$.

5.58. Найти в координатах (V, T) уравнение адиабаты для идеального газа в области температур, в которой теплоемкость газа меняется по закону $C_V = C_{V_0} + \alpha T^2$, где α — некоторая постоянная.

5.59. В некотором диапазоне параметров политропа вещества, подчиняющегося уравнению состояния идеального газа, описывается уравнением $PT^{(C-R)/R} \exp(-\alpha T^2/R) = \text{const}$. Как ведет себя при этом теплоемкость C_V ?

5.60. Состояния моля идеального газа в ходе некоторого процесса изображаются точками, лежащими на отрезке прямой, соединяющей точки A и B (рис. 5.2): $V_A = 0$, $P_A = P_0$; $V_B = V_0$, $P_B = 0$. Найти зависимость температуры газа от объема; определить максимальную температуру газа в ходе такого процесса.

5.61. Для процесса, описанного в задаче 5.60, определить молярную теплоемкость газа как функцию объема. Молярная теплоемкость при постоянном объеме C_V известна.

5.62. Многоатомный идеальный газ ($C_V = 3R$) расширяется в ходе процесса, описанного в задаче 5.60. На каких участках тепло подводится к газу, а на каких отводится от него?

5.63. Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре $T_1 = 273$ К, вытекает в атмосферу по трубке, в конце которой он приобретает скорость $v = 400$ м/с. Найти температуру вытекающего воздуха T_2 в конце трубки, а также давление P_1 воздуха в баллоне. Процесс истечения газа считать адиабатическим.

5.64. Скорость звука в воздухе при температуре 0°C и нормальном давлении $P = 76$ см рт. ст. равна $v = 332$ м/с; плотность воздуха $\rho = 0,0013$ г/см³. Определить $\gamma = C_P/C_V$.

5.65. Две органнне трубы одинаковой длины продувают: одну воздухом при комнатной температуре T_0 , а другую — гелием. Какова должна быть температура гелия T , чтобы тоны второй трубы были на одну октаву выше соответствующих тонов первой (отношение частот равно 2)? Считать известными показатели адиабат газов и их молярные массы.

5.66. Найти скорость адиабатического истечения идеального газа сосуда через небольшое отверстие в вакуум, если известно, что скорость звука в газе равна $v_{3в}$.

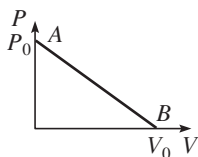


Рис. 5.2

Термодинамические циклы. Тепловые машины

5.67. На рис. 5.3 изображен цикл, проведенный с одним молем идеального одноатомного газа. Вычислить КПД цикла.

5.68. На рис. 5.4 изображен цикл, проведенный с одним молем идеального двухатомного газа. Вычислить КПД цикла.

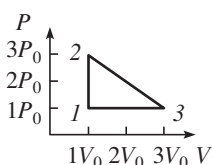


Рис. 5.3

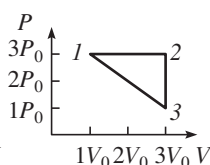


Рис. 5.4

5.69. Холодильный коэффициент некоторой идеальной машины равен κ . Каким будет отопительный коэффициент K при работе этого устройства в качестве теплового насоса при тех же значениях температур «нагревателя» и «холодильника»?

5.70. Бытовой холодильник потребляет электроэнергию в количестве $E = 0,8$ кВт·час в сутки, поддерживая при комнатной температуре ($t_1 = 27^\circ\text{C}$) температуру в камере равной $t_2 = 7^\circ\text{C}$. Считая холодильный агрегат идеальной машиной, работающей между камерой холодильника и комнатой, оценить, какое количество теплоты поступает в холодильник в единицу времени.

5.71. С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3^\circ\text{C}$ при температуре на улице $t_2 = 23^\circ\text{C}$. Предлагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0,4$ (40%), а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос. Какой должна быть в этом случае температура в помещении t_x ?

5.72. Работу одного из первых двигателей внутреннего сгорания можно моделировать циклом, состоящим из адиабаты, изобары и изохоры (рис. 5.5). Определить теоретический КПД такого двигателя, если известно отношение n максимального и минимального объемов газа (степень сжатия).

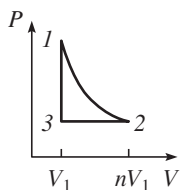


Рис. 5.5

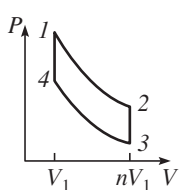


Рис. 5.6

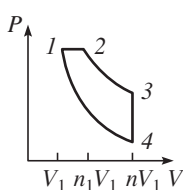


Рис. 5.7

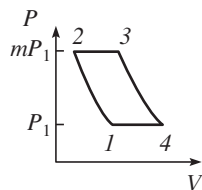


Рис. 5.8

5.73. Работу карбюраторного (бензинового) двигателя внутреннего сгорания можно моделировать циклом Отто, который состоит из двух адиабат и двух изохор (рис. 5.6). Выразить теоретический КПД двигателя через степень сжатия n .

5.74. Цикл Дизеля, описывающий работу одноименного двигателя, состоит из изобары, изохоры и двух адиабат (рис. 5.7). Вычислите теоретический КПД, зная n и n_1 .

5.75. В газовой турбине изменение состояния рабочего тела описывается циклом из двух изобар и двух адиабат (рис. 5.8). Найдите теоретический КПД турбины, если отношение давлений на изобарах равно m .

5.76. Двигатели Отто и Дизеля имеют одинаковые КПД. Степень сжатия в двигателе Отто равна $n = 10$, степень расширения на

изобаре в двигателе Дизеля — $n_1 = 3$. Определить для двигателя Дизеля степень сжатия на адиабате n_0 .

5.77. В цилиндр карбюраторного двигателя (см. зад. 5.73) впрыскивается в ходе одного цикла масса бензина $m = 20$ мг. Какую работу совершает за цикл двигатель, если степень сжатия равна $n = 10$, а КПД двигателя в 2 раза меньше теоретического?

Примечание: В этой и следующих задачах принимать теплоту сгорания топлива равной $\lambda = 4,2 \cdot 10^7$ Дж/кг и показатель адиабаты рабочего тела двигателя $\gamma = 1,4$.

5.78. Дизель грузовика КамАЗ при скорости $V = 60$ км/час расходует $m_s = 25$ кг топлива на 100 км пути при мощности $N = 50$ кВт. Какую долю теоретического значения $\eta_t = 0,65$ (65%) составляет реальный КПД двигателя η_p ?

5.79. При равномерном движении автомобиля «Жигули» со скоростью $v = 60$ км/час расход бензина равен $m_s = 5$ кг на 100 км пути. Степень сжатия рабочего тела двигателя $n = 10$, причем КПД двигателя в 3 раза меньше теоретического (см. зад. 5.73). Какую мощность развивает двигатель в этом режиме?

5.80. Турбина Костромской теплоэлектростанции развивает мощность $N = 1200$ МВт в режиме, при котором отношение давлений на изобарах равно $m = 6$ (см. зад. 5.75). КПД турбины составляет 90% от теоретического значения. Какое количество топлива (мазут, $\lambda = 4 \cdot 10^7$ Дж/кг) необходимо для непрерывной работы такой турбины в течение суток?

Энтропия

5.81. Сосуд разделен перегородкой на две равные части, в одной из которых вакуум, а в другой находится один моль двухатомного идеального газа. Перегородку удаляют и, после того, как газ равномерно заполнит весь сосуд, этот газ квазистатически возвращают в исходное положение теплонепроницаемым поршнем. На сколько изменятся энтропия и температура газа по сравнению с первоначальными?

5.82. В двух сосудах находится по одному молю разных идеальных газов. Температура в обоих сосудах одинакова. Давление в первом сосуде P_1 , а во втором — P_2 . Определить, на сколько изменится энтропия системы, если сосуды соединить. Как изменится результат, если газы одинаковы?

5.83. Теплоизолированный цилиндр разделен на две равные части закрепленным теплонепроницаемым поршнем. В каждой части сосуда находится один моль гелия, причем температура в одной из частей в два раза больше, чем в другой. Поршень освобождают, и после установления равновесия объем одной из частей сосуда оказывается в $n = 1,5$ раза больше объема другой части. Определить суммарное изменение энтропии гелия.

5.84. В одной части сосуда (зад. 5.83) находится один моль воздуха, а в другой — два. Вначале температуры порций газа одинаковы. После освобождения поршня объем одной из частей

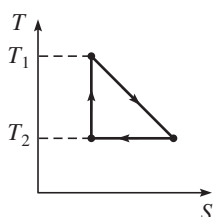


Рис. 5.9

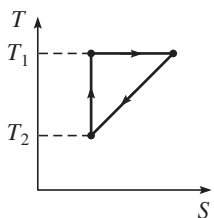


Рис. 5.10

сосуда в $n = 1,5$ раза больше другого. Определить суммарное изменение энтропии воздуха.

5.85. Тепловая машина с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рис. 5.9. Выразить КПД цикла через максимальную T_1 и минимальную T_2 температуры газа.

5.86. Тепловая машина с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рис. 5.10. Выразить КПД цикла через максимальную T_1 и минимальную T_2 температуры газа.

5.87. Цикл тепловой машины на TS -диаграмме изображается окружностью. Максимальная и минимальная температуры рабочего тела отличаются в 3 раза. Определить КПД цикла.

5.88. Найти КПД цикла, изображенного на рис. 5.11. Все процессы политропические; $T_2 = 2T_1$. Уравнение состояния рабочего вещества не задано.

5.89. Холодильная машина работает по обратимому циклу, состоящему из двух ветвей (рис. 5.12):

процесса I, в котором энтропия уменьшается с ростом температуры как линейная функция квадрата абсолютной температуры и политропы II. Уравнение состояния рабочего вещества неизвестно. Определить количество тепла, отобранное из холодильной камеры при затраченной работе 1 кДж, если отношение максимальной и минимальной абсолютных температур рабочего вещества в цикле $\alpha = 1,2$.

5.90. Холодильная машина работает по обратимому циклу, состоящему из двух ветвей (рис. 5.13): политропы I и процесса II, в котором

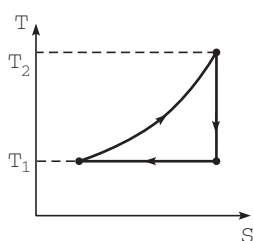


Рис. 5.11

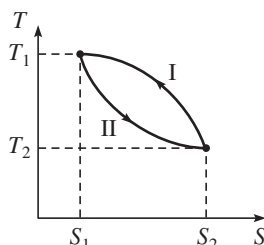


Рис. 5.12

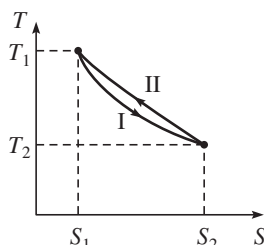


Рис. 5.13

энтропия рабочего вещества убывает с ростом температуры как линейная функция $\sqrt{T}$. Уравнение состояния рабочего вещества неизвестно. Отношение максимальной и минимальной абсолютных температур рабочего вещества в цикле $\alpha = 1,1$. Определить количество тепла, отбираемое у холодильной камеры на каждый джоуль затраченной работы.

Термодинамические потенциалы

5.91. Уравнение состояния некоторой термодинамической системы имеет вид $P = AT^3$, причем коэффициент пропорциональности A зависит от объема, но не зависит от температуры. Найти $(\partial C_V / \partial V)_T$ в точке $P = 10^5$ Па, $T = 300$ К.

5.92. Свободная энергия F одного моля некоторого вещества дается выражением $F = -\frac{RT}{2} \ln(AT^3V^2)$, где A — некоторая константа. Найти теплоемкость C_P этого вещества.

5.93. Термодинамический потенциал Φ одного моля некоторого вещества дается выражением $\Phi = -\frac{RT}{2} \ln \frac{AT^5}{P^2}$, где A — некоторая константа. Найти теплоемкость C_V этого вещества.

5.94. Уравнение состояния термодинамической системы имеет вид $P = A(V)T^3$. Найти $(\partial Q / \partial V)_T$ в точке $P = 1$ атм, $T = 300$ К.

5.95. Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость C_V которого не зависит от объема.

5.96. Один из методов получения очень низких температур основан на использовании зависимости термодинамических величин некоторых веществ (парамагнитных солей) от индукции магнитного поля B . В не слишком сильных полях свободная энергия соли имеет вид $F = F_0 - (\alpha/T)B^2$. Определить количество теплоты, поглощаемое солью при изотермическом размагничивании от поля $B = B_0$ до поля $B = 0$ при температуре T .

5.97. Образец парамагнитной соли при температуре $T = 1$ К находится в магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Какой будет температура образца после его адиабатического размагничивания, если в соответствующем диапазоне параметров свободную энергию соли можно принять равной $F = -AT^4/(a + B)^2$, где A и a — постоянные, причем $a = 10^{-4}$ Тл?

5.98. При температуре $T_1 = 2000$ К и нормальном давлении степень диссоциации водорода $\alpha_1 = 8,4 \cdot 10^{-4}$, т.е. доля молекул H_2 , распавшихся на атомы, равна α_1 . При температуре $T_g = 2500$ К и том же давлении степень диссоциации равна $\alpha_2 = 1,33 \cdot 10^{-2}$. Определить теплоту реакции диссоциации водорода.

5.99. При температуре $T = 1500$ К и нормальном давлении степень диссоциации йода J_2 на атомы J равна $\alpha = 0,26$. Как изменится эта величина при понижении давления в 10 раз?

5.100. Используя данные зад. 5.99, определить степень диссоциации йода при температуре $T' = 2000$ К и давлении, в 10 раз выше нормального. Теплота реакции диссоциации йода равна $Q_P = 1,44 \cdot 10^5$ Дж/моль.

5.101. Ток насыщения диода при температуре вольфрамового катода $T_1 = 2200$ К равен $I_1 = 2$ мА, а при температуре $T_2 = 2400$ К возрастает до $I_2 = 17,5$ мА. Определить работу выхода электрона для вольфрама.

3. Приложения законов термодинамики

1. Уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

2. Критические параметры:

$$V_K = 3b; \quad P_K = \frac{a}{27b^2}; \quad T_K = \frac{8a}{27bR}.$$

3. Внутренняя энергия моля газа Ван-дер-Ваальса

$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

4. Энтропия моля газа Ван-дер-Ваальса

$$S = C_V \ln T + R \ln(V - b) + S_0.$$

5. Дифференциальный эффект Джоуля-Томсона (адиабатическое дросселирование — процесс без изменения энтальпии):

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_H = \frac{(2a/RT) - b}{C_P}.$$

6. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса для связи давления и температуры на кривой фазового перехода:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Lambda}{T \Delta V},$$

где Λ — молярная теплота фазового перехода, ΔV — изменение молярного объема; если высокотемпературная фаза — идеальный газ, а объемом конденсированной фазы можно пренебречь, то $dP/dT = \Lambda P/RT^2$.

7. Формула Лапласа для избыточного давления под поверхностью с главными радиусами кривизны r_1 и r_2 :

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

8. Поднятие жидкости в капилляре радиуса r :

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

9. Изменение давления насыщенных паров над искривленной поверхностью

$$\Delta P_H \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho_{ж}}.$$

Газ Ван-дер-Ваальса

5.102. Атмосфера Венеры почти целиком состоит из CO_2 . Найти давление на поверхности планеты, если плотность газа $P = 0,07 \text{ г/см}^3$ и его температура $T = 750 \text{ К}$. Газ считать ван-дер-ваальсовским с критическими параметрами $P_k = 73 \text{ атм}$, $V_k = 94 \text{ см}^3/\text{моль}$ и $T_k = 304 \text{ К}$. Провести сравнение с давлением идеального газа при тех же условиях.

5.103. В откачанную ампулу заливают эфир при температуре 18°С и запаивают ее. Какая часть ампулы должна быть заполнена жидкостью, чтобы после нагрева до критической температуры $T_k = 467 \text{ К}$ эфир оказался в критическом состоянии? Известны $P_k = 35,5 \text{ атм}$, плотность жидкого эфира $\rho_{\text{ж}} = 0,714 \text{ г/см}^3$, $P_H(18^\circ\text{С}) = 400 \text{ мм рт. ст.}$. Считать, что к указанному эфиру применима модель газа Ван-дер-Ваальса.

5.104. Для демонстрации критического состояния вещества в пробирку заливают такое количество жидкости (эфира), для которого объем пробирки как раз равен критическому. После демонстрации пробирка охлаждается. Оказалось, что при некоторой температуре T жидкость, плотность которой $\rho_{\text{ж}} = 1,9\rho_k$, заполняет ровно половину пробирки. Определить эту температуру. Критическая температура эфира $T_k = 487 \text{ К}$. Считать, что эфир (как газ, так и жидкость) во всем диапазоне изменения параметров подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

5.105. Моль азота расширяется в вакуум от начального объема 1 л до конечного 10 л . Найти понижение температуры ΔT при таком процессе, если постоянная a в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота равна $1,35 \cdot 10^6 \text{ атм} \cdot \text{см}^6/\text{моль}^2$.

5.106. Газ Ван-дер-Ваальса вначале расширяют в вакуум от исходного объема V_0 до $2V_0$, а затем изотермически сжимают до $V_0/2$. Найти изменение энтропии одного моля газа, считая известными константы a и b , а теплоемкость C_V не зависящей от температуры. Начальная температура газа T_0 .

5.107. Найти $C_P - C_V$ для моля газа Ван-дер-Ваальса.

5.108. Моль газа Ван-дер-Ваальса расширяется изотермически от критического состояния до девятикратного увеличения объема. Определить изменение энтропии газа, подведенное к газу тепло и совершенную им работу. Критическую температуру T_k считать известной.

5.109. Моль эфира ($C_V = 3R$), находящийся в критическом состоянии, расширяется в теплоизолированный откачанный сосуд, причем занимаемый им объем увеличивается в $n = 17$ раз. Определить изменение энтропии газа.

5.110. Найти уравнение политропы для газа Ван-дер-Ваальса, считая, что его теплоемкость C_V не зависит от температуры.

5.111. Найти работу, совершаемую двигателем, работающим по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм. Рабочим веществом является один моль газа Ван-дер-Ваальса. Начальный объем $V_1 = 5b$, конечный $V_2 = 6b$, где b — константа Ван-дер-Ваальса. Температуры на изотермах $t_1 = 10^\circ\text{С}$, $t_2 = 20^\circ\text{С}$.

5.112. Найти КПД цикла, состоящего из адиабаты, изотермы (температура T_1 , объем уменьшается от V_2 до V_1) и изохоры (объем V_1 , температура увеличивается от T_1 до T_2). Рабочим веществом является один моль газа Ван-дер-Ваальса, константы a и b которого известны, а теплоемкость C_V не зависит от температуры.

5.113. При какой температуре T гелий в опыте Джоуля-Томсона начнет охлаждаться, если известно, что критическая температура гелия $T_k = 5,2$ К? Считать, что состояние гелия описывается уравнением Ван-дер-Ваальса.

5.114. Двухатомный газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, при температуре 300 К охлаждается в процессе Джоуля-Томсона на 0,024 К при уменьшении давления на 0,1 атм. Найти критическое давление и критический объем, если критическая температура равна -147°C .

Фазовые превращения. Поверхностные явления

5.115. В сосуд объема $V = 22,4$ дм³ поместили один моль кислорода и один моль водорода. Гремучую смесь подожгли. Какая максимальная масса воды может сконденсироваться после охлаждения продуктов реакции в этом сосуде до температуры $T = 373$ К? Каким при этом будет давление в сосуде?

5.116. Ромбическая сера превращается в моноклинную при $t = 96,5^\circ\text{C}$. При атмосферном давлении удельная теплота превращения $q = 2,2$ кал/г. Скачок удельного объема серы при фазовом превращении $\Delta v = 0,014$ см³/г. Найти смещение ΔT точки фазового перехода серы при изменении давления на $\Delta P = 1$ атм.

5.117. Уксусная кислота при атмосферном давлении плавится при температуре $t = 16,6^\circ\text{C}$. Разность удельных объемов жидкой и твердой фаз уксусной кислоты $\Delta v = 0,16$ см³/г. Точка плавления уксусной кислоты смещается на $\Delta T = 1$ К при изменении давления на $\Delta P = 41$ атм. Найти удельную теплоту плавления q уксусной кислоты.

5.118. Найти давление насыщенного водяного пара при температуре 101°C . Считать пар идеальным газом.

5.119. Найти изменение температуры плавления льда ΔT при повышении давления на $\Delta P = 1$ атм.

5.120. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые подземным теплом (рис. 5.14). Выход из них на поверхность земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал заполнен только паром, который и выбрасывается

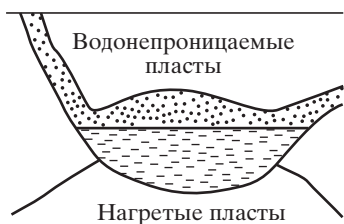


Рис. 5.14

закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал заполнен только паром, который и выбрасывается

наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h = 90$ м.

5.121. Определить удельную теплоту испарения воды λ_1 при температуре $T_1 = 323$ К, если при температуре $T_2 = 373$ К ее значение $\lambda_2 = 2,26 \cdot 10^3$ Дж/г. Удельную теплоемкость воды в этом диапазоне температур считать постоянной и равной $c = 4,20$ Дж/(г·К).

5.122. Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды в этот момент? Удельная теплота плавления льда $q = 335$ Дж/г. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

5.123. Капля ртути массой $m = 1$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Какую силу надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть имела форму круглой лепешки радиусом $r = 5$ см? Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0,465$ Н/м. Считать, что ртуть совершенно не смачивает стекло, так что угол между свободной поверхностью ртути и стеклянной пластинкой равен нулю.

5.124. Капля воды массой $m = 0,01$ г введена между двумя параллельными стеклянными пластинками, полностью смачиваемыми водой. Как велика сила притяжения между пластинками, если они находятся на расстоянии $d = 10^{-4}$ см друг от друга? Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м.

5.125. В вакууме в чашку с маслом, имеющим весьма низкую упругость пара и хорошо смачивающим стекло, погружена стеклянная капиллярная трубка радиусом r . Найти давление в масле на высоте $h/3$ над уровнем масла в чашке, где h — высота, на которую поднимается масло в капилляре (рис. 5.15). Поверхностное натяжение масла равно σ .

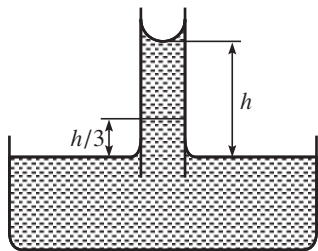


Рис. 5.15

5.126. На сколько отличается от C_p молярная теплоемкость идеального газа C , если его нагревают внутри мыльного пузыря радиуса $r = 1$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 50$ мН/м. Зависимостью σ от температуры пренебречь. Давление вне пузыря $P_0 = 1$ атм.

5.127. Вычислить давление насыщенного водяного пара при 20°C над сферической поверхностью капли воды, если ее радиус: 1) $r_1 = 10^{-5}$ см (капелька тумана), 2) $r_2 = 10^{-7}$ см. При такой температуре для воды $\sigma = 72,7$ мН/м, $v_{\text{ж}} = 1,002$ см³/г, $P_0 = 17,5$ мм рт. ст.

5.128. Переохлажденный водяной пар находится при давлении $P_0 = 1$ атм и температуре $t_0 = 99^\circ\text{C}$ в сосуде с несмачиваемы-

ми стенками. Каков минимальный размер капли, которая должна образоваться, чтобы произошла конденсация пара? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять $\sigma = 70$ мН/м.

4. Элементы статистической физики

1. Среднее значение величины a для дискретного распределения

$$\bar{a} \equiv \langle a \rangle = \frac{1}{N} \left(\sum_i a_i N_i \right) = \sum_i a_i w_i.$$

2. Среднее значение для непрерывного распределения с плотностью вероятности $f(\xi)$

$$\bar{a} \equiv \langle a \rangle = \int a(\xi) f(\xi) d\xi.$$

3. Дисперсия случайной величины

$$D_a = \overline{(a_i - \langle a \rangle)^2} = \bar{a}^2 - \bar{a}^2.$$

4. Абсолютная среднеквадратичная флуктуация

$$\sigma_a = \sqrt{D_a} = \sqrt{\langle (a_i - \langle a \rangle)^2 \rangle}.$$

5. Относительная среднеквадратичная флуктуация

$$\varepsilon_a = \sigma_a / \langle a \rangle.$$

6. Характеристики серии A из N однотипных событий a

$$\langle A \rangle = N \langle a \rangle;$$

$$D_A = N D_a;$$

$$\sigma_A = \sqrt{D_A} = \sqrt{D_a} \sqrt{N} = \sigma_a \sqrt{N};$$

$$\varepsilon_A = \sigma_A / \bar{A} = \sigma_a \sqrt{N} / N \bar{a} = \varepsilon_a / \sqrt{N}.$$

7. Барометрическая формула:

$$P = P_0 e^{-\mu g h / RT};$$

$$n = n_0 e^{-m g h / k_B T} = n_0 e^{-u / k_B T}.$$

8. Распределение Гиббса (число подсистем в состоянии с энергией ε_i ; μ — химический потенциал):

$$N_i = N_0 e^{-\varepsilon_i / k_B T} = e^{(\mu - \varepsilon_i) / k_B T}.$$

9. Распределение Максвелла-Больцмана:

$$dN = c_1 \exp \left(- \frac{u(x, y, z)}{k_B T} - \frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) dx dy dz dv_x dv_y dv_z.$$

10. Распределение Максвелла:

$$dw(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T} 4\pi v^2 dv.$$

11. Нормированное распределение Максвелла ($\xi = v/v_{\text{вер}}$):

$$dw(\xi) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi.$$

12. Формула Больцмана для связи энтропии и вероятности:

$$S = k_B \ln w.$$

13. Распределение Гаусса (нормальное распределение):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

14. Средняя кинетическая энергия на одну степень свободы

$$\langle \varepsilon_{1_{\text{кин}}} \rangle = \frac{k_B T}{2}.$$

15. Формула Найквиста для флуктуационного напряжения теплового шума в полосе частот $\Delta\nu$

$$\langle u_{\text{ш}}^2 \rangle = 4k_B T R \Delta\nu.$$

16. Формула Шоттки для флуктуаций тока (дробового шума) при среднем токе I :

$$\langle i_{\text{ш}}^2 \rangle = 2eI\Delta\nu.$$

17. Средний квадрат перемещения броуновской частицы (при подвижности B):

$$\langle x^2 \rangle = 2k_B T B t;$$

$$\langle R^2 \rangle = 6k_B T B t.$$

18. Эффективный коэффициент диффузии броуновской частицы (соотношение Эйнштейна):

$$D_B = k_B T B.$$

Элементы теории вероятностей

В задачах **5.129–5.134** описаны события (так, в зад. **5.131** одиночным событием следует считать последовательность из шести бросаний монеты) и указаны количественные оценки исходов. Вычислите средние значения получаемых результатов, среднеквадратичные абсолютные (σ) и относительные (ε) их флуктуации. Монеты и кости считать «нормальными», то есть все возможные исходы — равновероятными.

5.129. Если монета падает аверсом вверх (выпадает «орел»), засчитывается одно очко, т.е. полагается $a = 1$; если сверху реверс (решетка, «решка») — $a = 0$.

5.130. Монету бросают 2 раза и суммируют полученные очки. Как изменится ответ, если бросают сразу 2 монеты?

5.131. Монету бросают 6 раз, результат A — сумма очков. Как изменится ответ, если бросают сразу 6 монет; если трижды бросают по 2 монеты? Каждый раз суммируются 6 результатов.

5.132. Бросают игральную кость. Результат — число очков на верхней грани.

5.133. Бросают две кости, и очки суммируют.

5.134. Кость бросают 10 раз (или бросают 10 костей).

5.135. Стрелок производит один выстрел. Известно, что он попадает в цель с вероятностью $w_1 = 0,8$ (очевидно, вероятность промаха $w_0 = 0,2$). За попадание засчитывается 1 очко, за промах — 0.

5.136. Стрелок с вероятностью $w_1 = 0,7$ выбивает $a_1 = 10$ очков, и с вероятностью $w_2 = 0,3$ — $a_2 = 9$ очков (остальные результаты практически невероятны).

5.137. Стрелок из зад. **5.136** делает серию из 10 выстрелов (очки суммируются).

В задачах 5.138, 5.139 для заданных распределений (заданной плотности вероятности) вычислите c , $\langle a \rangle$, σ и ϵ .

5.138. $f(x) = c$ для $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 0$ для всех остальных x .

5.139. $f(x) = cx$ для $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 0$ для всех остальных x .

5.140. Математический маятник совершает гармонические колебания по закону $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Найти вероятность того, что при случайном измерении угла отклонения маятника это значение будет лежать в интервале $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, т.е. определить плотность вероятности значений угла φ : $f(\varphi) = dw(\varphi)/d\varphi$.

Барометрическая формула. Распределение Больцмана

5.141. Вычислить, где больше содержится воздуха: в слое у поверхности Земли толщиной 10 см или в слое толщиной 1 км на высоте 100 км. Считать атмосферу изотермической при $T = 300$ К. Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

5.142. Оценить, на какой высоте H в горах можно сварить яйцо, если белок свертывается при температуре $T_c = 353$ К (80°C). Атмосферу считать изотермической со средней температурой $\langle T \rangle = 280$ К (7°C). Теплота испарения воды при этой температуре равна $\Lambda = 4.45 \cdot 10^4$ Дж/моль.

5.143. Из результатов многочисленных измерений известно, что в диапазоне высот от $H_1 = 120$ км до $H_2 = 160$ км температура в атмосфере меняется по линейному закону от $T_1 = 332$ К до $T_2 = 1155$ К. Определить давление P_2 на высоте H_2 , если на высоте H_1 оно равно $P_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Па. Молярная масса воздуха на таких высотах равна $\mu = 27,5$ г/моль.

5.144. Относительная концентрация аргона ^{40}Ar в атмосфере вблизи поверхности Земли составляет 0,9%. Считая атмосферу изотермической ($T = 280\text{ K}$), оценить относительную концентрацию аргона на высоте, где давление падает в 10 раз.

5.145. Перрен в опытах по проверке распределения Больцмана использовал взвесь частичек коллодия массы $m = 1,25 \cdot 10^{-13}\text{ г}$ и плотности $\rho = 1,21\text{ г/см}^3$ в воде (плотность воды $\rho_0 = 1\text{ г/см}^3$). Концентрация частиц в исходной взвеси составляла $n_0 = 10^{11}\text{ см}^{-3}$. После установления равновесия наблюдалось распределение частиц по высоте. Определить концентрацию частиц у дна и у верха кюветы глубины $H = 0,1\text{ мм}$ при температуре $T = 295\text{ K}$.

5.146. Для опыта, описанного в зад. 5.145, определить, на каком расстоянии от дна кюветы концентрация частичек равна исходной.

5.147. После отбора сливок в молочном сепараторе остался раствор белка (молярная масса $\mu = 22\text{ кг/моль}$, плотность $\rho = 1,1\text{ г/см}^3$) в воде (плотность воды $\rho_0 = 1\text{ г/см}^3$). Моделируя сепаратор цилиндром радиуса $r = 10\text{ см}$, вращающимся вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью $\omega = 10^3\text{ с}^{-1}$, определить, на каком расстоянии от оси концентрация белка равна исходной. Температура равна $T = 295\text{ K}$.

5.148. Конический сосуд высоты H , заполненный идеальным газом с молярной массой μ , подвешен вершиной вниз, как показано на рис. 5.16. При какой температуре наиболее вероятное значение координаты z молекулы равно $H/2$?

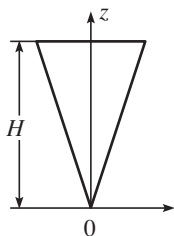


Рис. 5.16

5.149. Сферический сосуд радиуса R , наполненный идеальным газом, расположен в области однородного поля тяжести с ускорением свободного падения g . При какой температуре газа T наиболее вероятное положение молекулы газа будет находиться вблизи горизонтальной плоскости на расстоянии $R/2$ от центра сферы? Масса молекулы газа m .

5.150. Пользуясь формулой Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию $\bar{\epsilon}_п$ молекулы газа в земной атмосфере, считая последнюю изотермической (с температурой T), а поле тяжести — однородным. Вычислить теплоемкость газа C при этих условиях.

5.151. Теплоизолированный герметический цилиндрический сосуд высоты H , наполненный газом, подвешен в вертикальном положении в однородном поле тяжести. Температура газа в сосуде везде одинакова и равна T . Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа $\bar{\epsilon}_п$.

5.152. Пользуясь распределением Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию молекул идеального газа в поле $U(x) = ax^2$; $a > 0$.

5.153. Энергия молекулы в магнитном поле может принимать два значения $\epsilon_{1,2} = \pm \epsilon$. При какой температуре средняя энергия

взаимодействия молекулы с магнитным полем окажется равной $\langle \varepsilon \rangle = -\varepsilon/2$?

5.154. Энергия молекулы в магнитном поле может принимать три значения: $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_{1,2} = \pm \varepsilon$. Определить энергию взаимодействия с магнитным полем моля таких молекул при температуре $T = \varepsilon/k_B$.

Распределение Максвелла

5.155. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна таковой же скорости молекул азота при температуре 100°C .

5.156. Как зависит от давления средняя скорость молекул идеального одноатомного газа при адиабатическом сжатии или расширении?

5.157. Скорости молекул v_1 и v_2 равновероятны. Во сколько раз они отличаются от $v_{\text{вер}}$, если $v_2/v_1 = n = 5$?

5.158. Написать выражение для среднего числа dN молекул газа, кинетические энергии которых заключены между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$.

5.159. При каком значении температуры число молекул, находящихся в пространстве скоростей в фиксированном интервале $(v, v + dv)$, максимально?

5.160. В диоде электроны, эмитируемые накалившимся катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых (вышедших из катода) электронов распределены по закону Максвелла с температурой $T = 1150\text{ K}$, определить долю электронов α , преодолевающих задерживающий потенциал: 1) $V = 0,2\text{ В}$; 2) $V = 0,4\text{ В}$. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

5.161. Выразить число молекул z , ударяющихся о квадратный сантиметр стенки сосуда в одну секунду, через среднюю скорость движения газовых молекул, если функция распределения молекул по скоростям изотропна (т. е. зависит только от абсолютного значения скорости молекулы, но не от ее направления). Рассмотреть частный случай максвелловского распределения.

5.162. В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при температуре T , имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Определить среднее значение $\bar{\varepsilon}$ кинетической энергии вылетевшей молекулы в предположении, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа в сосуде пренебрежимо малы.

5.163. Теплоизолированная полость разделяет два сосуда с одним и тем же газом. Температура газа в одном из сосудов $T_1 = 200\text{ K}$, в другом — $T_2 = 800\text{ K}$. Давление в обоих сосудах одинаково и равно $P = 1\text{ атм}$. Полость сообщается с сосудами посредством малых отверстий (рис. 5.17). Оба отверстия одинаковы. Найти давление и температуру, установившиеся внутри полости.

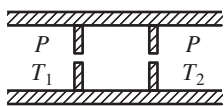


Рис. 5.17

5.164. Вольфрамовая нить, испаряясь в высокий вакуум при температуре $T = 2000$ К, уменьшается в массе, как показали измерения, со скоростью $q = 1,14 \cdot 10^{-13}$ г/(с·см²). Вычислить давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре.

5.165. Какова бы была мгновенная скорость испарения воды с каждого квадратного сантиметра ее поверхности, если бы над этой поверхностью был вакуум, а температура воды в тот момент равнялась 300 К? Табличное значение давления насыщенного водяного пара при этой температуре $P = 27$ мм рт. ст. Сравнить полученную величину с величиной скорости испарения воды при обычных условиях (т. е. когда над поверхностью воды находится воздух при нормальном давлении) и объяснить получившееся расхождение.

5.166. Кривые распределения Максвелла по модулю скорости для температур T_1 и T_2 пересекаются в максимуме кривой для T_2 . Найти отношение температур.

Статистический смысл энтропии. Флуктуации

5.167. Оценить среднеквадратичные относительные флуктуации числа молекул N воздуха при нормальных условиях в объеме 1 мкм³.

5.168. Определить величину объема идеального газа, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц составляет $\alpha = 10^{-6}$ от среднего числа частиц в том же объеме. Определить также среднее число частиц $\bar{n}$ в таком объеме. Газ находится в стандартных условиях.

5.169. В адиабатически изолированном сосуде, содержащем один моль кислорода при нормальных условиях, выделен объем размером 10^{-6} см³. Во сколько раз вероятность состояния, в котором температура в этом объеме отличается от средней на 10^{-3} К (при сохранении числа молекул внутри этого объема), меньше вероятности равновесного состояния?

5.170. Во сколько раз изменится средний квадрат флуктуаций температуры $\langle \Delta T^2 \rangle$ одноатомного идеального газа, находящегося в фиксированном малом объеме v при адиабатическом увеличении объема всей системы V в 8 раз ($v \ll V$)?

5.171. В кубическом сосуде емкостью $V = 1$ л при комнатной температуре находится N молекул водорода. Найти вероятность ω того, что эти молекулы соберутся в одной половине сосуда. Оценить величину N , при которой такое событие можно ожидать один раз на протяжении эпохи порядка возраста наблюдаемой части Вселенной ($T \sim 10^{10}$ лет).

5.172. Два одинаковых сосуда, в которых находится по молю одного и того же идеального газа при одинаковых условиях, сообщаются между собой через отверстие. Какое число молекул n должно перейти из одного сосуда в другой, чтобы возникшее состояние стало в $\alpha = e$ раз менее вероятным, чем исходное?

5.173. Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету $\bar{K} = 0,12$ А/Вт. Какова относительная флукту-

ация ε числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью $\Phi = 1,3 \cdot 10^{-11}$ Вт? Время регистрации $\tau = 10^{-3}$ с.

5.174. Вычислить среднюю относительную флуктуацию потенциальной энергии внутримолекулярных колебаний двухатомной молекулы идеального газа, а также одного моля таких молекул.

5.175. Вычислить флуктуацию кинетической энергии поступательного движения молекулы идеального газа.

5.176. Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию высоты столбика смачивающей жидкости в капилляре, опущенном в широкий сосуд. Плотность жидкости — ρ , поверхностное натяжение — σ .

5.177. Оценить предельную чувствительность $\Delta T/T$ идеального газового термометра, в котором температура измеряется по объему газа при постоянном давлении. Количество газа в термометре равно 10^{-3} моля.

5.178. Известно, что тепловое движение механизма пружинных весов определяет при заданной температуре T предел их чувствительности. Оценить предельно малую массу, которая может быть определена при однократном взвешивании на пружинных весах, считая, что коэффициент жесткости пружины равен α .

5.179. Сигнал от радиопередатчика, принятый на расстоянии $l_0 = 1$ км, равен по мощности уровню собственных тепловых шумов приемника. С какого расстояния l можно вести прием с тем же соотношением сигнал/шум, если охладить входные цепи приемника от комнатной температуры $T_0 = 300$ К до температуры жидкого гелия $T = 4,2$ К?

5.180. Во сколько раз надо увеличить мощность передатчика зад. **5.179**, чтобы прием с расстояния $l = 8,5$ км можно было вести при комнатной температуре входных цепей приемника?

5.181. Малые колебания тока диода регистрируются измерительной схемой со временем усреднения $\tau \approx 1$ с. Оценить минимальное значение отклонений тока $\Delta I_{\min}$ от его среднего значения, равного $I = 1$ мА, которые могут быть зарегистрированы на фоне дробовых шумов диода.

Теплоемкость. Броуновское движение

5.182. Определите суммарную энергию вращательного движения молекул метана CH_4 , занимающего объем $V = 1$ дм³ при давлении $P = 10^5$ Па.

5.183. Какова будет средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы водорода, если первоначально он находился при нормальных условиях, а затем был адиабатически сжат в 32 раза?

5.184. Найти значение средней энергии $\bar{\varepsilon}$, приходящейся, согласно классической кинетической теории газов, на одну степень свободы вращательного движения молекулы газа при $t = 27^\circ\text{C}$. Найти значение средней квадратичной частоты вращения молекулы кислорода при этих

условиях. Момент инерции молекулы кислорода вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии молекулы, $I_{\perp} = 19,2 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

5.185. Определить среднеквадратичную угловую скорость вращения молекулы азота в воздухе при нормальных условиях. Расстояние между ядрами в молекуле N_2 равно $r = 1,1 \text{ \AA}$.

5.186. Свободный пробег молекул H_2 в He при нормальных условиях равен приблизительно $3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Найти среднеквадратичное смещение $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ молекул H_2 в He за 1 с; за 100 с. Как изменится результат, если: 1) давление He увеличить в 4 раза; 2) температуру He увеличить в 3 раза; 3) давление и температуру увеличить в 4 раза?

5.187. Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в некотором газе равна 10^{-5} см , найти (приблизительно) среднюю скорость дрейфа v иона в этом газе под действием однородного электрического поля $E = 300 \text{ В/см}$. Температура газа комнатная.

5.188. Космические лучи блуждают в Галактике, отклоняясь в межзвездных магнитных полях. Этот процесс подобен диффузии. Найти время τ , за которое частицы пройдут путь порядка размеров Галактики $R \approx 5 \cdot 10^{22} \text{ см}$, если эффективная длина свободного пробега $\lambda \approx 3 \cdot 10^{20} \text{ см}$.

5.189. В микроскоп рассматривают тонкий слой крови. Оценить, какое время потребуется, чтобы заметить броуновское смещение эритроцитов, плавающих в плазме крови, если минимальное расстояние, которое можно зафиксировать, составляет $l = 10^{-6} \text{ м}$. Вязкость крови $\eta = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, эритроцит считать шариком радиуса $r = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Температура $t = 27^\circ \text{C}$.

5.190. При прохождении быстрых заряженных частиц через камеру Вильсона, наполненную аргоном при давлении $P = 1 \text{ атм}$ и насыщенными парами воды, происходит образование ионов аргона, являющихся центрами конденсации паров воды. Считая, что движение ионов обусловлено только диффузией, оценить ширину следа частиц, если конденсация наступает через $\tau = 0,01 \text{ с}$ после пролета частиц. Эффективное сечение рассеяния ионов аргона на атомах $\sigma = 10^{-15} \text{ см}^2$. Атомная масса аргона $A = 40$, температура $T = 300 \text{ К}$.

5.191. В рацион питания космонавта было включено молоко, которое за несколько суток до старта залили в вертикально расположенный цилиндрический сосуд. За это время в молоке образовался состоящий из капелек жира слой, толщина которого оказалась значительно меньше высоты сосуда. Успеет ли восстановиться однородное распределение капелек жира в сосуде за такое же время пребывания в невесомости? Считать, что размер капелек во времени не меняется и что запуск ракеты (ввиду его кратковременности) не привел к перемешиванию молока.

5.192. Сферический сосуд радиуса r_1 заполнен газом. Молярная масса газа — μ , температура — T . Через трубочку радиуса r_2 и длины l газ поступает в масс-спектрометр. Сечение молекул σ та-

ково, что выполнены условия $1/nr_2 \gg \sigma \gg 1/nr_1$, где n — концентрация газа. В некоторый момент времени в центре сосуда возникает примесь изотопа того же газа, мало отличающегося по массе. Оценить время, через которое масс-спектрометр сможет зафиксировать примесь.

5.193. Энергия молекулы в магнитном поле может принимать два значения $\varepsilon_{1,2} = \pm\varepsilon$. Определить изменение теплоемкости моля газа из-за взаимодействия молекул с магнитным полем при условии $\varepsilon \ll k_B T$.

5.194. Решить задачу **5.193** при условии $\varepsilon \gg k_B T$.

5.195. Энергия молекулы в магнитном поле может принимать три значения: $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_{1,2} = \pm\varepsilon$. Определить изменение теплоемкости моля газа из-за взаимодействия молекул с магнитным полем при условии $\varepsilon \ll k_B T$.

5. Неравновесные процессы

1. *Открытыми*, называются системы, способные обмениваться веществом и энергией с внешней средой. Скорость роста энтропии за счет неравновесных процессов $\sigma = dS/dt > 0$ (она равна нулю только в идеализированном случае строго равновесного процесса) и ее значение в единице объема носит название *функции диссипации*.

2. Внутренняя структура, или самоорганизация, поддерживается в открытой системе за счет поглощения отрицательной энтропии, которая носит название, *негэнтропии*. Если в открытой системе отток энтропии наружу уравнивает ее рост в самой системе, то такое стационарное состояние называется *текущим равновесием* и при этом функция диссипации имеет минимум.

3. С математической точки зрения неустойчивость и пороговый характер самоорганизации связаны с нелинейностью уравнений, описывающих поведение системы при больших отклонениях от равновесия. Для широкого класса гидродинамических, механических, химических, электрических систем установлено, что переход от простого к хаотическому состоянию происходит через последовательность периодических состояний. Характерной чертой перехода системы от простого периодического к сложному аperiodическому является последовательное удвоение периода при изменении параметров системы.

5.196. Газ расширяется адиабатически, но неравновесно, из начального равновесного состояния 1 в конечное, также равновесное, состояние 2. При этом газ совершает некоторую работу. Затем газ квазистатически сжимают до начального состояния 1: сначала изотермически, потом адиабатически. Работа, затраченная при сжатии, оказалась больше работы, совершенной газом при расширении, на величину $A = 20$ Дж. Температура газа T в состоянии 2 равна 250 К. Найти изменение энтропии газа при переходе из состояния 1 в состояние 2.

5.197. В цилиндрическом сосуде постоянного объема находился моль одноатомного идеального газа при температуре T_0 и давлении P_0 . В сосуде устанавливают постоянный градиент температуры, причем температура дна равна T_0 , а крышки — $4T_0$. Определить изменение энтропии газа

Указание. См. задачу 5.38.

5.198. В сосуде под поршнем находился моль двухатомного идеального газа при температуре T_0 . В сосуде устанавливают постоянный градиент температуры, причем температура дна равна T_0 , а поршня — $9T_0$. Определить изменение энтропии газа.

Указание. См. задачу 5.39.

5.199. Биологические системы принципиально являются открытыми системами и тем самым неравновесными. Согласно постулату Пригожина общее изменение энтропии dS открытой системы может происходить независимо либо за счет процесса обмена с внешней средой ($d_e S$), либо вследствие внутренних необратимых процессов ($d_i S$). Показать, что для изолированной системы мы приходим неизбежно к классической формулировке второго закона термодинамики. Что можно сказать при этом об изменении энтропии во внутренних процессах?

5.200. Пусть единственной причиной необратимости и увеличения энтропии системы являются ее внутренние процессы. Как связано при этом изменение во времени энтропии внутренних процессов с термодинамическим потенциалом Гиббса Φ ?

5.201. Самоорганизация и эволюция открытых биологических систем на всех уровнях (от клетки до биосферы в целом) происходит вследствие оттока энтропии в окружающую среду. Оценить верхний предел оттока энтропии от Земли. Получаемая Землей от Солнца энергия составляет $dE/dt = 1,2 \cdot 10^{17}$ Вт.

5.202. По отношению к космическому кораблю организм космонавта является открытой системой, хотя сам корабль хорошо изолирован от окружающего космического пространства. Показать, что стационарное состояние космонавта поддерживается возрастанием энтропии в окружающей среде.

5.203. Пусть имеется простейшая замкнутая популяция клеток, в которой происходит процесс размножения и гибели, и питательный раствор имеется в избытке. Как меняется численность клеток в такой системе со временем и может ли в ней установиться стационарное состояние?

5.204. Процесс роста и деления клетки феноменологически может быть описан на энтропийном языке. Предполагая клетку сферой радиуса r , в которой производство энтропии пропорционально ее объему ($S_i = \alpha V$), а отток в окружающее пространство ее поверхности ($S_e = -\beta S$), найти стационарный радиус клетки. Насколько изменится энтропия, если клетка разделится пополам?

5.205. Показать, что информация эквивалентна негэнтропии, причем увеличение энтропии всегда больше количества полученной информации (негэнтропийное толкование информации было предло-

жено Л. Сциллардом в 1927 г.). На основе указанной эквивалентности вычислить информацию о системе двух газов с количеством молекул N_1 и N_2 соответственно, определив изменение энтропии при смешении газов.

Указание. Количество информации I о состоянии системы определяется соотношением $I = \log_2 P$, где P — число различных равновероятных событий (например, при бросании монеты $P = 2$, при бросании кости $P = 6$). Единицей информации служит один бит, отвечающий одному выбору из двух равновероятных возможностей, как это имеет место при бросании монеты (двоичная альтернатива).

5.206. Уравнение Навье-Стокса для вязкой жидкости может быть приведено к разностному уравнению

$$u(t + T) = u_0 - \operatorname{Re} \frac{u^2(t)}{u_0},$$

если предположить, что в нем имеется некоторое характерное течение с периодом T . В этом уравнении u — скорость течения, u_0 — некая характерная скорость течения, например, скорость движущегося в нем тела, а Re — число Рейнольдса. Какова будет при этом скорость такого периодического течения? Найти условие устойчивости периодического течения и показать, что на границе устойчивости возникает движение с удвоенным периодом.

5.207. Рассмотрим уравнение Каданова — квадратичное преобразование

$$f = 4\lambda x(1 - x),$$

которое переводит значение $x(n)$ в последующее $x(n + 1)$ значение как

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Найти аналитически и графически неподвижные точки этого преобразования (последовательность таких точек может рассматриваться как преобразование с периодом равным единице в интервале $(0, 1)$ значений x и λ). При каких значениях λ таких точек две, а при каких одна?

5.208. Неподвижная точка x^* является устойчивой (притягивающей или аттрактором), если выполняется условие

$$|f'(x^*)| < 1.$$

При каких значениях λ найденные в предыдущей задаче неподвижные точки являются устойчивыми? Показать графически, как происходит эволюция системы, если начальная точка $x_0 = 0,1 \neq x^*$, а $\lambda = 0,5$.

5.209. Как следует из задачи **5.208**, при $\lambda > 3/4$ у преобразования $f = 4\lambda x(1 - x)$ нет притягивающих точек. Показать, что эти же неподвижные точки не являются притягивающими и для функции f^2 .

Указание. Воспользоваться условием устойчивости неподвижных точек, приведенным в задаче **5.208**.

5.210. При $\lambda > 3/4$ у функции f^2 (дважды вычисленной функции f) появляются две устойчивые неподвижные точки, являющиеся

аттрактором с двойным периодом, т.е. происходит удвоение периода эволюции системы. Построить графически последовательные итерации функции f при $\lambda = 0,785$ и убедиться, что функция f преобразует одну из неподвижных точек функции f^2 в другую, т.е. имеются две точки x_1^* и x_2^* , которые преобразуются следующим образом: $x_1^* = f(x_2^*)$, $x_2^* = f(x_1^*)$.

6. Квантовая теория излучения

1. Электромагнитное поле может рассматриваться как газ частиц — фотонов, обладающих энергией $E = \hbar\omega$ и импульсом $p = \hbar k$, т.е. характеризующихся законом дисперсии $E = pc$. Число уровней, приходящихся на единичный интервал энергии, или иначе статистический вес, определяется выражением

$$g(E)dE = \frac{VE^2}{\pi^2 c^3 \hbar^3} dE.$$

2. Объемная спектральная плотность равновесного излучения u_ω , т.е. энергия излучения, отнесенная к единице объема и к единичному интервалу частоты, определяется выражением

$$u_\omega d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} d\omega,$$

которое называется формулой Планка.

3. Длина волны, на которую приходится максимум спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела, вычисляется по формуле

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где T — абсолютная температура тела. Этот закон называется законом смещения Вина, а константа

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{град}$$

постоянной смещения Вина.

4. Полная (интегральная) лучеиспускательная способность или энергетическая светимость R тела — это величина электромагнитной энергии Φ , испускаемой по всем направлениям единицей поверхности тела в единицу времени во всем интервале длин волн

$$R = \frac{\Phi}{S},$$

где S — излучающая поверхность. Величина R зависит от природы тела и его температуры.

5. Спектральная (монохроматическая) лучеиспускательная способность или спектральная энергетическая светимость $r_{\lambda,T}$ тела — это величина, численно равная величине электромагнитной энергии,

испускаемой единицей поверхности тела по всем направлениям в единицу времени в интервале длин волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR}{d\lambda}.$$

6. Спектральная поглощательная способность $a_{\lambda,T}$ тела есть безразмерная величина, показывающая, какую долю монохроматического потока $\Phi_{\text{пад}}$ лучистой энергии, падающей на тело, данное тело поглощает:

$$a_{\lambda,T} = \frac{\Phi_{\lambda,\text{пог}}}{\Phi_{\lambda,\text{пад}}}.$$

7. Интегральной поглощательной способностью тела или коэффициентом поглощения называется величина

$$A(T) = \frac{\Phi_{\text{пог}}}{\Phi_{\text{пад}}}.$$

Тело, полностью поглощающее падающее на него излучение всех длин волн, называется абсолютно черным. Для него $a_{\lambda,T} = 1$. Для всех других тел $a_{\lambda,T} < 1$.

8. Связь между испускательной и поглощательной способностями любого тела устанавливает закон Кирхгофа

$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = f(\lambda, T),$$

который формулируется следующим образом: отношение лучеиспускательной и лучепоглощательной способностей не зависит от природы тела, а является для всех тел одной и той же функцией длины волны и температуры.

9. Закон Стефана-Больцмана для интегральной излучательной способности абсолютно черного тела:

$$R_T^{\text{acht}} = \sigma T^4,$$

где величина

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5,57 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}^4}$$

называется постоянной Стефана-Больцмана.

Для нечерных тел коэффициент поглощения $a_{\lambda,T}$ меньше единицы и предполагается, что он не зависит от длины волны. Закон Стефана-Больцмана принимает вид

$$R_T = a_T \sigma T^4.$$

10. Световое давление определяется по формуле

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho),$$

где E — энергетическая освещенность поверхности, ρ — коэффициент отражения.

11. Переходы атома из возбужденного состояния на более низко расположенные энергетические уровни происходят самопроизвольным образом (спонтанные переходы), тогда как под действием внешнего излучения (фотонов) в атоме могут происходить и индуцированные переходы. Отношение числа индуцированных к числу спонтанных переходов с уровня 2 на уровень 1, что эквивалентно отношению вероятностей этих переходов, определяется лишь числом имеющихся в системе фотонов данной энергии

$$\frac{N_{21}^{\text{инд}}}{N_{21}^{\text{сп}}} = \frac{w_{21}^{\text{инд}}}{w_{21}^{\text{сп}}} = n.$$

12. В обозначениях Эйнштейна числа переходов N_{12} и N_{21} записываются через спектральную плотность u_ω следующим образом:

$$N_{12} = B_{12}N_1u_\omega t, \quad N_{21} = B_{21}N_2u_\omega t + A_{21}N_2t.$$

Коэффициенты Эйнштейна B_{12} , B_{21} и A_{21} , связаны соотношениями

$$B_{21} = B_{12}, \quad A_{21} = \frac{2k\omega^3}{\pi c^3} B_{21}.$$

13. При взаимодействии излучения со средой происходят как процессы поглощения, так и спонтанного и индуцированного испусканий. Если спонтанное излучение значительно менее вероятно, чем индуцированное (достаточно высока интенсивность падающего излучения), то

$$\frac{dI}{I} = w_a^{(1)}(N_2 - N_1)z,$$

где $w_a^{(1)}$ — вероятность поглощения одного кванта, а интенсивность падающего излучения зависит от расстояния как

$$I = I_0 \exp[w_a^{(1)}(N_2 - N_1)dz],$$

14. Если в среде заселенность уровней соответствует равновесной, т.е. всегда $N_2 < N_1$, то происходит только затухание падающей волны. Иначе говоря, в термодинамически равновесной среде всегда поглощение оказывается большим, чем излучение. Чтобы происходило усиление падающего излучения, в среде должна быть инверсная заселенность уровней, т.е. $N_2 > N_1$. О такой среде говорят как о неравновесной, или активной среде.

Излучение как идеальный газ фотонов

5.211. Рассматривая равновесное тепловое излучение как идеальный газ фотонов, получить формулу $P = u/3$, связывающую плотность энергии теплового излучения u с давлением излучения P .

5.212. Найти теплоемкость C_P и уравнение адиабаты фотонного газа, заключенного в сосуд с переменным объемом.

5.213. Найти изменение энтропии равновесного теплового излучения абсолютно черного тела при расширении объема, занятого

излучением, от V_1 до V_2 при постоянной температуре. Давление излучения $P = u/3$, где u — плотность энергии излучения.

5.214. Рассматривая излучение в полости как газ фотонов с импульсом p и энергией $E = cp$ (c — скорость света), покажите, что закон адиабатического сжатия излучения в объеме с идеально отражающими стенками имеет вид $PV^{4/3} = \text{const}$.

5.215. Найти с помощью законов термодинамики зависимость плотности энергии теплового излучения от температуры, основываясь на модели излучения как идеального фотонного газа.

Указание. Учесть, что плотность энергии излучения не зависит от объема.

5.216. Основываясь на модели излучения как фотонного газа, найти связь между энергетической светимостью абсолютно черного тела и плотностью энергии теплового излучения.

5.217. Какова температурная зависимость теплоемкости фотонного газа?

Формула Планка

5.218. Найти число собственных колебаний струны длины l в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$. Считать, что струна может колебаться лишь в одной плоскости.

5.219. Показать на примере полости в виде прямоугольного параллелепипеда, что число собственных колебаний электромагнитного поля в полости объемом V с абсолютно отражающими стенками в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ равно

$$dZ_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

где c — скорость света в вакууме.

5.220. Электромагнитное поле, заполняющее некоторую полость, можно представить в виде совокупности собственных колебаний (осцилляторов) с различными частотами. Считая, что энергия осцилляторов может принимать любое значение (непрерывный спектр), а распределение осцилляторов по энергиям подчиняется закону Больцмана $N(E) = Ae^{-E/kT}$, найти среднюю энергию осциллятора при температуре T и объемную плотность энергии излучения в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

5.221. Исходя из формулы Планка для числа квантов равновесного теплового излучения в единице объема в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, найти выражение, определяющее число квантов в интервале длин волн $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

5.222. В области частот $\hbar\omega/k_B T \ll 1$ равновесное излучение можно рассматривать с позиций классической физики. Показать, что при указанном условии формула Планка переходит в формулу Рэлея-Джинса. Получить эту же формулу из общих термодинамических соотношений.

5.223. На какую длину волны приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела при температуре 100°C , 1000°C , $10\,000^\circ\text{C}$?

5.224. Излучение абсолютно черного тела, имеющего температуру 2400 K , падает на светофильтр, который пропускает 90% излучения только в области длин волн от $0,5\text{ мкм}$ до $0,4\text{ мкм}$. Какую долю полного падающего потока пропускает светофильтр?

5.225. Слой вещества поглощает все фотоны с энергией $E \geq 0,2\text{ эВ}$ и полностью прозрачен для фотонов меньшей энергии. Оценить, какую долю солнечной энергии α пропускает вещество. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T = 6500\text{ K}$.

5.226. Слой вещества поглощает все фотоны с энергией $E > 12\text{ эВ}$ и полностью прозрачен для фотонов меньшей энергии. Оценить, какую долю солнечной энергии α поглощает вещество. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T = 6500\text{ K}$.

5.227. Яркостной температурой тела называется такая температура, при которой абсолютно черное тело имеет при определенной длине волны λ ту же монохроматическую яркость излучения, что и заданное тело. Найти связь между истинной температурой T и яркостной температурой T_λ для серого тела с коэффициентом излучения $\varepsilon_{\lambda,T}$. Считать, что в рассматриваемой спектральной области монохроматическую энергетическую светимость можно вычислить по формуле Вина

$$B_{\lambda,T_\lambda} = \frac{C_1}{\pi} e^{C_2/\lambda T_\lambda}.$$

5.228. Оптическим пирометром, снабженным светофильтром, пропускающим излучение с длиной волны $0,665\text{ мкм}$, измерена яркостная температура тела. Определить истинную температуру тела, если яркостная температура оказалась равной 2600 K . Коэффициент излучения поверхности тела равен $0,8$.

Интегральные характеристики излучения

5.229. Имеются две полости с малыми отверстиями одинаковых диаметров $d = 1\text{ см}$ и абсолютно отражающими наружными поверхностями (рис. 5.18). Расстояние между отверстиями $R = 10\text{ см}$. В первой полости поддерживается постоянная температура $T_1 = 1700\text{ K}$. Какова установившаяся температура во второй полости?

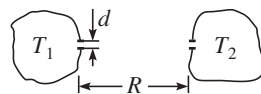


Рис. 5.18

5.230. Вследствие повышения температуры максимум спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела уменьшился с 2 мкм до 1 мкм . Во сколько раз изменилась интегральная энергетическая светимость?

5.231. При какой температуре в полностью ионизованной водородной плазме плотности $\rho = 0,1\text{ г/см}^3$ давление излучения равно кинетическому давлению частиц плазмы?

Указание. При высоких температурах вещество хорошо описывается уравнением идеального газа.

5.232. При измерении интенсивности реликтового излучения Пензиас и Вильсон использовали обычный радиотелескоп на длине волны $\lambda = 3$ см, антенный тракт находился при температуре $T = 300$ К. Этот тракт поглощал 1% поступающей мощности и естественно создавал тепловой шум, мешающий наблюдениям. Какая эффективная температура тракта в области измерений?

5.233. Температура абсолютно черного тела возросла от 500°C до 1500°C . Во сколько раз увеличилась его интегральная энергетическая светимость?

5.234. Оценить световое давление в центре урановой бомбы в момент ее взрыва, предполагая, что излучение — равновесное, температура внутри бомбы $T \simeq 10$ кэВ.

5.235. Вычислить температуру поверхности Солнца, считая его абсолютно черным телом, если известно, что на 1 м^2 земной поверхности падает лучистый поток $1,35 \cdot 10^3$ Вт/м². Расстояние от Земли до Солнца $1,5 \cdot 10^8$ км, радиус Солнца $6,5 \cdot 10^5$ км.

5.236. Зачерненная пластинка помещена перпендикулярно падающим лучам в вакууме. Определить лучистую энергию, поглощаемую 1 см^2 поверхности в минуту, если температура пластинки установилась равной 327°C . Потерями на теплопроводность пренебречь.

5.237. При какой температуре давление теплового излучения равно 1 атм?

5.238. Показать, что максимум объемной плотности $u(\lambda, T)$ равновесного теплового излучения, а также максимум излучательной способности $E(\lambda, T)$ абсолютно черного тела растут пропорционально T^5 .

5.239. Определить силу светового давления солнечного излучения на поверхность земного шара, считая ее абсолютно черной и не учитывая поглощения излучения в атмосфере Земли. Если бы атмосфера не поглощала, то 1 см^2 земной поверхности, расположенный перпендикулярно лучам, получал бы около $8,1$ Дж/мин. Радиус Земли 6400 км.

5.240. Оценить порядок величины радиуса сферической космической частицы, для которой сила притяжения к Солнцу уравновешивается силой светового давления солнечного излучения. Поверхность частицы считать абсолютно черной, плотность ее равна $7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Солнце считать абсолютно черным излучателем температуры 6000 К, масса Солнца $1,97 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца $6,96 \cdot 10^5$ км. Дифракцией света на частице пренебречь.

5.241. Определить, за какое время медный шар, помещенный в вакуум, охладится с $T_1 = 500$ К до $T_2 = 300$ К. Радиус шара 1 см, поглощательная способность поверхности шара $\varepsilon = 0,8$, удельная теплоемкость меди $C = 390$ Дж/(кг·град), плотность меди $\rho = 8,9 \times 10^3$ кг/м³. Влиянием окружающих предметов пренебречь.

5.242. Отношение интегральной энергетической светимости некоторого тела к интегральной энергетической светимости абсолютно черного тела при той же температуре равно 0,36. Определить, во сколько раз будет отличаться истинная температура тела от радиационной.

5.243. Нить лампы накаливания излучает как абсолютно черное тело, имеющее температуру 2400 К. Вычислить, сколько фотонов испускается с 1 см^2 поверхности нити в 1 с, если среднюю энергию кванта излучения считать равной $2,75k_B T$.

5.244. В фокусе параболического зеркала радиусом 10 см с фокусным расстоянием 1 м расположен тонкий матовый диск, по размерам совпадающий с изображением Солнца в фокусе зеркала. Какова максимально возможная температура диска, если Солнце излучает как черное тело с температурой 6000 К?

5.245. Вольфрамовая нить накала электрической лампочки диаметром $5 \cdot 10^{-3}$ см работает в режиме постоянного тока при температуре 3000 К. Когда нить питается переменным током при той же номинальной мощности, то интенсивность света колеблется вблизи среднего значения на 25%. Оцените отсюда постоянную Стефана-Больцмана. Объемная теплоемкость вольфрама $4 \text{ Дж}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$.

5.246. Освещенность L , создаваемая звездой первой величины на поверхности Земли при нормальном падении света, составляет 10^{-4} лк. Можно ли объяснить мерцание звезд квантовыми флуктуациями света?

5.247. При работе лампы накаливания на переменном токе наибольшая и наименьшая температуры нити отличаются на 70 К. Принимая среднюю температуру нити равной 2450 К, определить относительное изменение лучистого потока за полупериод («мигание» лампы).

5.248. Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения светового диапазона с энергией в импульсе $E = 1 \text{ Дж}$. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется дифракцией на выходной апертуре, а монохроматичность излучения — длительностью импульса.

5.249. В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле составляет $P = 10^{13}$ Вт, в то время как мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, $P_0 = 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят земные источники энергии?

5.250. Оценить, до какой максимальной температуры может разогреться в космосе кусочек металлического урана-238 массой $m = 4 \text{ г}$ за счет естественной радиоактивности. Плотность урана $\rho = 18,7 \text{ г}/\text{см}^3$, период спонтанного деления $T_{1/2}^{\text{сп}} = 10^{16}$ лет. Характеристики его альфа-распада — $T_{1/2}^{\alpha} = 10^9$ лет, $E_{\alpha} = 4,2 \text{ МэВ}$. Влиянием солнечной радиации и космических лучей пренебречь.

Спонтанное и индуцированное излучение. Лазеры

5.251. В какой области спектра равновесного (черного) излучения при температуре $T = 300$ К интенсивность индуцированного излучения превосходит интенсивность спонтанного?

5.252. При какой температуре равновесного (черного) излучения индуцированное излучение в видимой области ($\lambda = 550$ нм) превосходит спонтанное?

5.253. Определить диапазон длин волн электромагнитного излучения, в котором вероятность спонтанного перехода более чем в 100 раз превосходит вероятность индуцированного перехода под влиянием равновесного теплового излучения комнатной температуры.

5.254. Определить время установления колебаний и добротность в оптическом резонаторе, используемом в лазерах (длина волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм) и состоящем из двух плоскопараллельных зеркал, расположенных на расстоянии $L = 100$ см друг от друга и имеющих коэффициент отражения $R_1 = 100\%$ и $R_2 = 80\%$. Явлениями дифракции на краях зеркал пренебречь.

5.255. Найти условие самовозбуждения генерации света в резонаторе лазера, если он состоит из двух плоскопараллельных зеркал и заполнен газом двухуровневых молекул. Спонтанное время жизни молекул на верхнем уровне равно $\tau_{\text{сп}}$, полная ширина спектра излучения молекул равна $\Delta\nu$, расстояние между зеркалами L , коэффициент отражения зеркал R . Практически все потери излучения происходят на зеркалах.

5.256. С какой точностью должна быть стабилизирована температура лазерного резонатора длиной $L = 1$ м, чтобы обеспечить стабильность частоты $\Delta\omega/\omega = 10^{-15}$? Коэффициент линейного расширения считать равным $\alpha = 10^{-7} \text{ К}^{-1}$.

5.257. Возбужденный атом с энергией возбуждения $E = 1$ эВ находится в поле равновесного излучения с температурой $T = 300$ К. Найти отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучений атома.

5.258. Электрон, ориентированный под действием магнитного поля с индукцией $B = 0,1$ Тл, находится в поле равновесного излучения с температурой $T = 300$ К. Каково отношение вероятности индуцированного к вероятности спонтанного переворота спина электрона?

7. Кристаллические структуры твердых тел

1. Три вектора, которые позволяют построить бесконечную пространственную решетку, называются *векторами трансляции*. Обозначим векторы трансляции $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Параллелепипед, имеющий в качестве ребер векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется *примитивной* ячейкой. Радиус-вектор любой другой точки кристаллической решетки получается естественным образом при трансляции примитивной ячейки:

$$\mathbf{r} = n_1 \mathbf{a} + n_2 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c},$$

где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа.

2. Положение узла элементарной ячейки задается координатами, которые выражаются в долях длин векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, а начало координат выбирается в вершине угла элементарной ячейки. Например, координаты атома, находящегося в центре элементарной ячейки объемно-центрированной кубической (оцк) решетки, равны $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

3. Для описания положения плоскостей используются индексы Миллера, которые определяются следующим образом: 1) найдем точки, в которых данная плоскость пересекает основные координатные оси, и выразим их координаты в единицах постоянных решетки; 2) возьмем обратные значения полученных чисел и приведем их к наименьшему общему кратному каждому из чисел. Индексы Миллера, определяющие плоскость, заключаются в круглые скобки. Например, для плоскости, которая пересекает оси в точках с координатами 4, 1 и 2, обратные числа будут $\frac{1}{4}, 1$ и $\frac{1}{2}$; следовательно, индексы Миллера для этой плоскости есть (142). Если плоскость пересекает ось в области отрицательных значений координат, то над соответствующим индексом Миллера ставится черта. Индексы Миллера (hkl) по существу определяют кристаллографическую ориентацию плоскости, т.е. они задают семейство параллельных плоскостей.

4. Полный набор элементов симметрии какой-либо материальной фигуры называется группой (видом) симметрии этой фигуры, которая определяет то или иное физическое явление в кристаллах. Принято обозначать плоскость симметрии буквой P , ось симметрии k -го порядка — C_k , зеркально-поворотную ось k -го порядка — S_k ; центр симметрии (центр инверсии) — I . Порядок оси симметрии $n = 360^\circ/\alpha$, где α — угол наименьшего поворота, приводящего фигуру в совмещение.

5. Во многих случаях можно считать, что кристалл представляет собой систему из соприкасающихся твердых шаров. Минимуму энергии будет соответствовать такая структура, в которой шары наиболее плотно упакованы. *Плотность упаковки* или *коэффициент компактности* определяется отношением объема частиц к объему элементарной ячейки V_a . В случае частиц одного сорта кратчайший период a и соотношение между радиусом шаров R и a определяется контактом соседних шаров.

Число ионов противоположного знака, которое составляет ближайшее окружение данного иона в кристалле, называется *координационным числом* K . Значение координационного числа определяется величиной отношения радиусов ионов противоположного знака r_A/r_B .

6. Основой для описания законов дифракционного рассеяния является условие Брэгга Вульфа

$$2d \sin \theta = n\lambda,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, — целое число, называемое порядком интерференции, λ — длина волны используемого излучения, d — рас-

стояние между соседними плоскостями семейства кристаллических плоскостей, θ — угол скольжения падающей и рассеянной волн относительно этих плоскостей.

5.259. Сколько атомов приходится на одну примитивную ячейку в кристаллах с простой, объемноцентрированной и гранецентрированной кубической структурой?

5.260. Какие плоскости в кубической решетке являются эквивалентными в кристаллографическом и физическом смысле плоскости (100)?

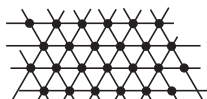


Рис. 5.19

5.261. Показать графически, как пересекают атомную плоскость кристалла (001) системы плоскостей (110), (100), (120), (110), (120), (320).

5.262. Какая примитивная ячейка соответствует гексагональной двумерной структуре, показанной на рис. 5.19? Перечислить элементы симметрии, присущие данной структуре.

5.263. Перечислить элементы симметрии (с указанием их числа), присущие простым решеткам следующих кристаллографических систем: 1) кубической, 2) тетрагональной, 3) гексагональной.

5.264. Определить постоянную кристаллической решетки алюминия, образующего гранецентрированный куб.

5.265. Альфа-железо имеет кубическую объемноцентрированную структуру ($a = 2,86 \text{ \AA}$), гамма-железо — кубическую структуру с центрированными гранями ($a = 3,56 \text{ \AA}$). Как изменится плотность железа при переходе его из α - в γ -модификацию?

5.266. Количественной мерой плотности упаковки в кристаллической структуре служит степень упаковки, равная отношению объема, занятого атомами (твердыми шарами) в элементарной ячейке, к ее объему. Вычислить степень упаковки для простой кубической решетки, объемноцентрированной кубической решетки и гранецентрированной кубической решетки.

5.267. Сильвин (KCl) представляет собой кубический кристалл с плотностью $1,98 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Найти расстояние между двумя соседними атомами и минимальное расстояние между атомами одного сорта.

5.268. Ионные кристаллы хорошо описываются моделью соприкасающихся шаров. Вычислить на основе этой модели период гранецентрированной кубической решетки поваренной соли NaCl, исходя из ее плотности $\rho = 2,17 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и молекулярного веса $\mu = 58,45 \text{ кг/кмоль}$.

5.269. В некоторых металлах происходит структурный переход от объемноцентрированной к гранецентрированной кубической решетке, практически не сопровождающийся изменением объема тела. Найти отношение d_1/d_2 , где d_1 , d_2 — кратчайшие расстояния между атомами в гранецентрированной и объемноцентрированной решетках.

5.270. Чему должна быть равна энергия протонов, для которых кристалл с постоянной решеткой $1 \text{ \AA}$ мог бы играть роль дифракционной решетки?

5.271. Для «очистки» пучка медленных нейтронов из реактора от всегда имеющихся быстрых нейтронов, он пропускается через блок прессованного графита. При этом все нейтроны, которым соответствует длина волны меньше $6,7 \text{ \AA}$, испытывают интерференционное отражение. Определить, какой максимальной температуре соответствует скорость выходящих после графита медленных нейтронов и чему равна постоянная решетки графита.

5.272. Структурный фазовый переход всегда сопровождается изменением симметрии кристаллической решетки. Предполагая, что исходной была простая кубическая решетка, а при структурном переходе происходит изменение угла между ребрами квадрата в основании решетки на $\theta = 3^\circ$ и он становится ромбом, определить, как качественно изменится спектр рассеянных на такой структуре нейтронов (от диагоналей). Каково должно быть относительное угловое разрешение детектора $|\Delta\theta/\theta|$, чтобы заметить искажение решетки?

5.273. Определить угол, под которым пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1,1 \text{ \AA}$ отражается в максимальном порядке от системы кристаллических плоскостей, расстояние между которыми $d = 2,5 \text{ \AA}$.

5.274. Металлический натрий кристаллизуется в объемноцентрированную решетку. Показать, что среди рефлексов от его решетки нет отражений от плоскостей куба.

8. Динамика атомов кристаллической решетки. Фононы

1. Закон дисперсии для гармонических колебаний одномерной решетки, составленной из одинаковых атомов массы m , описывается соотношением

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|,$$

где γ — жесткость связей в решетке. Звуковые волны распространяются в этой решетке со скоростью $s = a\sqrt{\gamma/m}$.

2. Если в одномерной цепочке имеются два сорта атомов, т.е. она состоит из расположенных на расстоянии a попеременно частиц массой m и M , то дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(ka/2)} \right),$$

где $\omega_0^2 = \frac{4\gamma}{\mu}$, $\mu = \frac{2mM}{m+M}$, $\alpha^2 = \frac{4mM}{(m+M)^2}$. В спектре колебаний

появилось две ветви: низкочастотная, соответствующая знаку «—», ее называют акустической, она полностью аналогична колебаниям линейной цепочки из одинаковых частиц, и высокочастотная — оптическая. При малых значениях k ($ka \ll 1$) выражения для акустической и оптической частот колебаний приобретают вид

$$\omega_1'^2 = \frac{2\gamma}{m+M}(ka)^2, \quad \omega_2'^2 = \frac{2\gamma}{\mu}.$$

3. Каждой волне, следуя идеям де Бройля, можно сопоставить частицу (вернее квазичастицу), называемую *фононом*. При взаимодействии какой-либо падающей частицы с кристаллической решеткой механическая энергия колебаний может измениться только на величину, кратную энергии фонона $\hbar\omega$. Тепловые свойства кристалла — теплоемкость, теплопроводность — хорошо описываются моделью идеального газа фононов. В так называемом *дебаевском приближении* предполагается, что для фононов линейный закон дисперсии справедлив во всем диапазоне ω и k . Максимальная частота фононов называется *дебаевской частотой* ω_D и она равна

$$\omega_D = s \sqrt[3]{6\pi^2 N},$$

где N — концентрация атомов. Дебаевской частоте ставится в соответствие *характеристическая температура* — *температура Дебая* Θ , определяемая соотношением:

$$\hbar\omega_D = k_B \Theta \quad \rightarrow \quad \Theta = \hbar\omega_D / k_B.$$

8. В дебаевской модели теплоемкость кристалла при низких температурах ($T \ll \Theta$) пропорциональна кубу температуры (закон Дебая):

$$C_V = \frac{2}{5} \frac{\pi^2 k_B^4}{\hbar^3 s^3} T^3 \propto T^3.$$

При высоких температурах ($T \gg \Theta$) теплоемкость описывается классическим законом Дюлонга и Пти

$$C = 3Nk_B.$$

В расчете на один моль вещества $C = 3R$, где R — газовая постоянная.

5. Коэффициент решеточной теплопроводности равен

$$\chi = \frac{1}{3} C s \lambda,$$

где C — теплоемкость единицы объема, λ — средняя длина свободного пробега фононов, s — скорость звука. Длина свободного пробега фононов, которая ограничивается столкновениями с дефектами, на стенках кристалла, с другими фононами, равна

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}.$$

где n — концентрация рассеивающих центров, σ — сечение рассеяния фононов.

Колебания атомов кристаллической решетки

5.275. Определить число собственных колебаний струны длиной l в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, если скорость распространения колебаний равна v .

5.276. Найти фазовую и групповую скорости волн как функции волнового числа k в одномерной цепочке, состоящей из атомов массой m , среднее расстояние между которыми равно a . Атомы взаимодействуют с ближайшими соседями по закону $\gamma(x_{n+1} - x_n)^2/2$, где x_n — координата n -го атома.

5.277. Одномерное дисперсионное уравнение для фононов имеет вид $\omega = C|\sin(ka/2)|$. Чему равна константа C , если скорость звука равна 5000 м/с? Каковы величины фазовой v и групповой u скоростей для величин волнового вектора $k = \pi/2a, -\pi/2a, \pi/a, 3\pi/2a$? Какие из приведенных значений волнового вектора соответствуют эквивалентным фононам?

5.278. Каково относительное изменение частоты колебаний одномерной цепочки, построенной из одинаковых атомов, если сдвиг фазы между колебаниями соседних атомов изменился от $\pi/3$ до π ?

5.279. В одномерной цепочке, составленной из одинаковых атомов, скорость звука равна $s = 2 \cdot 10^3$ м/с, а постоянная решетки $a = 0,3$ нм. При какой частоте колебаний ω сдвиг фаз между двумя атомами, находящимися на расстоянии $10a$, составит $\pi/2$?

5.280. В кристалле поваренной соли максимум поглощения света приходится на длину волны $\lambda = 61$ мкм. Показать, что этот максимум соответствует возбуждению фонона в центре зоны Бриллюэна. Для NaCl упругая константа (жесткость цепочки) $\gamma = 15$ Н/м.

5.281. Вычислить температуру Дебая железа, в котором скорости продольных и поперечных волн равны соответственно 5850 и 3230 м/с.

5.282. Найти максимальную частоту фонона, который может родиться в жидкости под действием света с длиной волны $\lambda = 4000$ Å. Показатель преломления среды $n = 1,5$, скорость звука в жидкости $s = 5 \cdot 10^3$ м/с.

5.283. Спектрометром анализируется свет от лазера с длиной волны $\lambda = 6328$ Å, рассеянный под углом $\varphi = 90^\circ$ в воде ($n = 1,5$). Какова должна быть разрешающая способность спектрометра, чтобы различить линии, соответствующие неупругому рассеянию света с рождением или поглощением фонона? Скорость звука в воде $s = 1,5 \cdot 10^3$ м/с.

5.284. Из экспериментов по неупругому рассеянию нейтронов на кристалле KBr известно, что максимальная частота фононов, соответствующих акустическим поперечным колебаниям атомов ребер его кубической решетки, составляет $\omega = 7,85 \cdot 10^{12}$ с⁻¹. Оценить в рамках модели колебаний одномерной цепочки скорость поперечных звуковых колебаний вдоль этого направления. Плотность кристалла $\rho = 2,75 \cdot 10^3$ кг/м³.

5.285. Статические диэлектрические проницаемости ионных кристаллов NaF и NaBr, обусловленные поляризацией решетки, равны 5,1 и 6,4, а их плотности — $2,84 \cdot 10^3$ и $3,18 \cdot 10^3$ кг/м³. Оценить отношение частот оптических фононов этих кристаллов.

Эффект Мессбауэра

5.286. Какова должна быть скорость источника относительно поглотителя, чтобы изменение энергии излучения свободным радиоактивным нуклидом ^{119m}Sn из-за отдачи скомпенсировать за счет доплеровского сдвига? Расстояние между основным и первым возбужденным уровнем у олова-119 равно $E_0 = 23,8$ кэВ.

5.287. Свободное покоящееся ядро иридия-131 переходит из возбужденного состояния с энергией $E = 129$ кэВ в основное, испуская γ -квант. Найти энергию излучаемого γ -кванта E_γ и энергию отдачи R ядра. Рассчитать изменение энергии излучаемого кванта в случае, когда ядро находится в кристаллической решетке массой $M_k = 1$ г, которая полностью воспринимает импульс отдачи ядра (эффект Мессбауэра).

5.288. При комнатной температуре примерно $f = 20\%$ γ -распадов ^{119}Sn в соединении BaSnO_3 происходит без отдачи (эффект Мессбауэра). Оценить, какой должна быть толщина источника, чтобы в нем не происходило заметного поглощения мессбауэровских γ -квантов. Плотность BaSnO_3 $\rho = 3 \cdot 10^3$ кг/м³, содержание изотопа ^{119}Sn в естественной смеси $\varepsilon = 8$, энергия γ -квантов $E_\gamma = 24$ кэВ.

5.289. Оценить, каково при комнатной температуре уширение (в электрон-вольтах) линии γ -излучения олова-119m за счет теплового движения, если излучающее ядро является свободным.

5.290. В мессбауэровской спектроскопии широко используется ядро ^{57}Fe , излучающее γ -кванты с энергией 14,4 кэВ. Оценить, каково у такого свободного ядра при комнатной температуре отношение доплеровской ширины к сдвигу линии за счет энергии отдачи.

5.291. Время жизни τ первого возбужденного состояния у ядра ^{119}Sn равно $3 \cdot 10^{-8}$ с. При какой температуре у этого свободного ядра доплеровское уширение будет порядка естественной ширины линии γ -излучения?

5.292. Естественная ширина линии первого возбужденного состояния с энергией 22,4 кэВ у ядра ^{119}Sn равна $\Delta E = 3 \cdot 10^{-8}$ эВ. Какова должна быть скорость источника относительно поглотителя, чтобы при наблюдении эффекта Мессбауэра интенсивность счета прошедших γ -квантов уменьшилась вдвое? Считать, что ядра источника и поглотителя находятся в идентичных условиях и при одинаковой температуре, т.е. максимум интенсивности соответствует нулевой скорости.

5.293. При излучении γ -кванта ядром находящимся в кристаллической решетке, энергия отдачи переходит в возбуждение фононов, т.е. набор осцилляторов, соответствующих собственным колебаниям кристалла. Согласно квантовой механике, существует конечная ве-

роятность f осцилляторам остаться в невозбужденном состоянии, и этот процесс соответствует излучению без отдачи (эффекту Мессбауэра), который определяется выражением

$$f = \exp(-4\pi^2 \langle x^2 \rangle / \lambda),$$

где $\langle x^2 \rangle$ — среднеквадратичное смещение ядер в процессе тепловых колебаний решетки (в направлении вылета γ -кванта), λ — длина волны γ -излучения. Воспользовавшись соотношением неопределенностей, получить выражение для вероятности эффекта Мессбауэра в зависимости от разброса импульса осциллирующего ядра, осуществив тем самым переход от волновой картины процесса к корпускулярному.

5.294. Воспользовавшись выражением для вероятности эффекта Мессбауэра, приведенным в предыдущей задаче, оценить ее величину для ядра ^{119}Sn , находящегося в кристаллической решетке олова при температуре, равной его температуре Дебая $\Theta = 195$ К. Энергия излучаемых γ -квантов $E_\gamma = 23,8$ кэВ.

Модель Дебая

5.295. Вычислить минимальную длину волны Дебая в титане, если его характеристическая температура равна 280 К, а скорость звука в нем $s = 6 \cdot 10^3$ м/с.

5.296. Какова в эВ максимальная энергия фононов в кристалле свинца, если его температура Дебая $\Theta = 94$ К?

5.297. Германий и кремний кристаллизуются в решетки с близкими параметрами и имеют почти равные модули упругости. Оценить отношение их дебаевских температур.

5.298. Оценить максимальные значения энергии и импульса фононов в алюминии, у которого температура Дебая $\Theta = 375$ К, а элементарной ячейкой его кристаллической решетки является гранецентрированный куб с ребром $r_0 = 4,04$ Å.

5.299. Каково отношение числа фононов с дебаевской частотой $\omega_D = k\Theta/\hbar$ к числу фононов с частотой $\omega_D/2$ в кристалле, описываемом моделью Дебая, при температурах $T_1 = \Theta$ и $T_2 = \Theta/10$?

5.300. Оценить, какую долю постоянной решетки $a = 5,8$ Å твердого криптона ($A=84$) составляет амплитуда колебаний атомов при температуре плавления $T = 117$ К. Дебаевская температура криптона $\Theta = 57$ К.

Теплоемкость и теплопроводность решетки

5.301. Используя аналогию между фотонами и длинноволновыми фононами, выразить низкотемпературную решеточную теплоемкость кристаллов через скорости поперечного и продольного звуков s_t и s_l .

5.302. Найти температурную зависимость решеточной теплоемкости одномерных (C_1) и двумерных (C_2) кристаллов в области низких температур.

5.303. Удельная теплоемкость решетки пирографита (одной из модификаций углерода) зависит от температуры как T^2 , а не как T^3 , что обычно имеет место для твердых тел. Что можно сказать о структуре этой специфичной фазы углерода?

5.304. В кристалле поваренной соли NaCl при температуре $T = 10$ К теплоемкость единицы объема $C_V = 830 \cdot 10^{-4}$ Дж/(м³·К). Оценить скорость звука в кристалле и его дебаевскую температуру. Постоянная решетки NaCl равна $a = 0,3$ нм.

5.305. Температура Дебая у алмаза равна 2000 К. Какова его удельная теплоемкость при температуре $T = 30$ К?

5.306. Какова удельная теплоемкость цинка при 100°С? Температура Дебая $\Theta = 330$ К.

5.307. Одинаковые массы свинца ²⁰⁷Pb и кремния ²⁸Si охлаждают с помощью жидкого гелия (температура кипения гелия равна при нормальном давлении 4,2 К) от температуры $T_1 = 20$ К до $T_2 = 4,2$ К. Оценить отношение масс жидкого гелия, необходимых для охлаждения свинца и кремния, если известно, что дебаевские температуры равны: $\Theta(\text{Pb}) = 95$ К и $\Theta(\text{Si}) = 645$ К. Теплоемкостью электронов пренебречь.

5.308. Определить в дебаевской модели отношение теплоемкостей образцов Ве и Си одинакового объема при $T = 300$ К. Плотности бериллия и меди соответственно равны $1,8 \cdot 10^3$ и $8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, температуры Дебая 1440 К и 340 К.

5.309. При комнатной температуре средняя длина свободного пробега фононов в кристалле хлористого натрия в 4 раза больше постоянной его решетки $d = 5,64$ Å. Вычислить коэффициент теплопроводности этого кристалла, если скорость звука в нем $s = 5 \cdot 10^3$ м/с.

5.310. Вычислить среднюю длину свободного пробега фононов в кристалле серебра при $T = 300$ К, если коэффициент теплопроводности серебра $\chi = 418$ Вт/(м·К), а скорость распространения звука $s = 3700$ м/с.

5.311. В кварце при комнатной температуре длина свободного пробега фононов имеет порядок $\lambda_f = 3 \cdot 10^{-4}$ м, скорость звука $s = 10^3$ м/с. Оценить теплопроводность кварца.

5.312. Оценить длину свободного пробега фононов в германии при температуре 300 К, используя следующие данные: дебаевская температура германия $\Theta = 360$ К, коэффициент теплопроводности $\chi = 80$ Вт/(м·К), атомный вес равен 72,6, плотность $\rho = 5500$ кг/м³, средняя скорость звука $s = 4500$ м/с. Считать, что перенос тепла осуществляется только фононами.

5.313. Дебаевская температура алмаза $\Theta = 2000$ К. Вычислить отношение теплопроводности алмаза при температуре $T = 50$ К к теплопроводности при 4 К, предполагая, что в обоих случаях преобладающим процессом рассеяния фононов является рассеяние на границах кристалла.

5.314. Рассчитать коэффициент теплопроводности при $T = 1$ К кристаллического стержня диаметром 3 мм из синтетического корунда (Al_2O_3). Скорость звука в корунде $s = 5000$ м/с, его плотность $\rho = 4000$ кг/м³, дебаевская температура $\Theta = 1000$ К.

5.315. Оценить максимально возможную величину коэффициента теплопроводности цилиндра диаметром $d = 3$ мм из кристаллического искусственного сапфира при температуре 30 К. Температура Дебая у сапфира $\Theta = 100$ К, скорость звука $s = 10^4$ м/с, а его теплоемкость при $T \ll \Theta$ определяется выражением $C_V = 0,1T^3$ Дж/(м³·К).

5.316. Фононы рассеиваются в кристалле на примесных центрах с поперечным сечением рассеяния σ порядка геометрического (10^{-15} см²). Оценить фоновую теплопроводность кристалла при температуре $T = 30$ К, если концентрация примесей в нем $n = 10^{21}$ м⁻³, а скорость звука $s = 3 \cdot 10^3$ м/с. При какой толщине кристалла начнет сказываться рассеяние фононов на границах?

5.317. Одномерная цепочка состоит из атомов с массами m и $M = 9m$. Оценить относительный вклад в теплоемкость оптических колебаний атомов цепочки при температуре $T = \Theta/10$, где Θ — соответствующая температура Дебая.

9. Электроны в кристаллах

Металлы

1. В модели свободных электронов предполагается, что металл содержит свободные электроны, способные перемещаться по всему объему (газ свободных электронов). В основном состоянии низшие одноэлектронные уровни полностью заполнены вплоть до некоторой энергии, называемой уровнем Ферми E_F и равной

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$$

Здесь k_F — максимальное значение волнового вектора электронов — определяется выражением

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3},$$

где $n = N/V$ — плотность электронов. Соответственно уровень Ферми или энергия Ферми E_F — максимальная энергия электронов, отсчитанная от нулевой кинетической энергии, дается выражением

$$E_F = \frac{1}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3} \simeq \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} n^{2/3},$$

а фермиевский импульс (максимальный импульс электронов)

$$p_F = (3\pi^2 \hbar^3 n)^{1/3}.$$

2. Температура, соответствующая энергии Ферми, называется температурой вырождения

$$T_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mk_B} n^{2/3}.$$

3. Функция распределения электронов по энергиям при ненулевых температурах $f(\varepsilon)$ (распределение Ферми) имеет вид

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T} + 1\right)}.$$

Электронная часть теплоемкости металла оценивается по формуле

$$C_V^{\text{эл}} \simeq \frac{3}{2} k_B \frac{2k_B T}{E_F} n = 3 \frac{k_B^2 n}{E_F} T.$$

Химпотенциал μ в металлах практически совпадает с E_F .

4. Взаимодействие атомов при образовании кристаллической решетки приводит к расширению энергетических уровней атомов и превращению их в кристалле в *энергетические* зоны. В случае изотропной трехмерной решетки в модели сильной связи, когда учитываются только перескоки электронов к ближайшим соседним ионам, закон дисперсии будет иметь вид

$$E = E_0 - 2A \cos k_x a_x - 2A \cos k_y a_y - 2A \cos k_z a_z.$$

В этом выражении константа A определяет ширину зоны проводимости.

5. Величина

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}$$

играет роль массы для электрона при его движении в кристалле и называется *эффективной массой*, электрона. Эффективная масса электрона в кристалле — это масса такого свободного электрона, которую он должен был бы иметь для того, чтобы под действием внешней силы приобрести такое же ускорение, как и электрон в кристалле под действием той же силы.

6. Рассматривая электроны как газ свободных квазичастиц, можно найти на основе газокINETической теории выражение для коэффициента электронной теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} C v_F l,$$

где C — электронная теплоемкость, v_F — фермиевская скорость электронов, $l = 1/n\sigma$ — их длина свободного пробега (σ , n соответственно эффективное сечение рассеяния и концентрация рассеивающих центров).

7. Удельное сопротивление ρ как металлов, так и полупроводников может быть вычислено по формуле Друде-Лоренца

$$\rho = \frac{m^*}{ne^2 \tau},$$

где τ — время релаксации, т.е. среднее время пробега электрона между двумя последовательными столкновениями. Время релаксации электронов в металле может быть выражено через длину свободного пробега l и их фермиевскую скорость:

$$\tau = \frac{l}{v_F},$$

а в полупроводниках через подвижность μ :

$$\tau = \frac{\mu m^*}{e}.$$

Полупроводники

8. Концентрация электронов n_n в зоне проводимости (дырок в валентной зоне n_p) определяется выражением

$$n_{n(p)} = Q_{n(p)} e^{-\Delta/k_B T},$$

где Δ — ширина запрещенной зоны.

Величина

$$Q_{n(p)} = \frac{2}{\hbar^3} \left(\frac{m_{n(p)}^* k_B T}{2\pi} \right)^{3/2}$$

определяет эффективное число уровней в зоне проводимости (валентной зоне) и носит название *статистического фактора* зоны. Произведение концентраций электронов и дырок равно

$$n_n n_p = Q_n Q_p e^{-\Delta/k_B T}$$

9. Проводимость, обусловленную процессом теплового возбуждения исходной (без примесей) кристаллической решетки, называют *собственной*, поскольку она определяется свойствами самого кристалла. Соответственно и концентрацию носителей n_i в зоне проводимости, возникающих за счет переходов из валентной зоны, называют концентрацией собственных носителей. В беспримесном полупроводнике концентрация собственных носителей n_i , равная как концентрации электронов, так и дырок, которые рождаются парами, может быть записана в виде

$$n_i = n_n = n_p = \sqrt{Q_n Q_p} e^{-\Delta/2k_B T},$$

откуда следует соотношение

$$n_n n_p = n_i^2.$$

В полупроводнике без примесей (собственном полупроводнике) уровень Ферми расположен практически посередине запрещенной зоны. В примесных полупроводниках n -типа (полупроводниках с донорными примесями) уровень Ферми при $T = 0$ будет равен половине энергии донорного уровня E_d отсчитанной от дна зоны проводимости.

Аналогично у полупроводника p -типа (с акцепторными уровнями) уровень Ферми при нулевой температуре равен $E_a/2$ (E_a — энергия акцепторного уровня). По мере увеличения температуры в примесных полупроводниках уровень Ферми смещается к значению $\Delta/2$.

10. При контакте полупроводников с разным типом легирования образуется так называемый $(p-n)$ -переход — обедненный носителями переходной слой, имеющий очень большое сопротивление. При подаче на $(p-n)$ -переход внешнего напряжения V_e ток через него равен сумме токов электронов и дырок:

$$I = I_e + I_p = A[I_e(\leftarrow) - I_e(\rightarrow)] = Ae^{-\Delta/k_B T} (e^{eV_e/k_B T} - 1).$$

В этой формуле константа A определяется концентрациями акцепторных и донорных примесей, а величина V_e включает в себя знак, а именно $V_e < 0$ при подключении положительного полюса внешнего источника к p -области.

11. *Эффект Холла*. Если пропустить ток вдоль проводника, находящегося в магнитном поле, перпендикулярном движению тока, то в поперечном направлении возникает ЭДС (ЭДС Холла), причем ее направление перпендикулярно магнитному полю. Если пропускаемый ток — I_x (предполагается, что ток переносится только носителями одного типа — либо электронами либо дырками), а его ширина — y , то ЭДС Холла равна

$$V_X = \frac{1}{ne} \frac{I_x B_z}{y} = R_H \frac{I_x B_z}{y}.$$

Коэффициент пропорциональности R_H между V_X и B_z, I_x называется *константой Холла*, она определяется только концентрацией носителей тока и равна $1/ne$.

12. *Квантовый эффект Холла*, заключается в том, что в двумерном электронном газе (МДП-структуры, гетеропереходы) продольное сопротивление становится исчезающе малым, а холловское сопротивление R_X принимает дискретные значения

$$R_X = \frac{V_X}{I_x} = \frac{R_1}{\nu} = \frac{h}{\nu e^2},$$

где $R_1 \simeq 25,8$ кОм — квантованное холловское сопротивление, а ν — целое число (фактор заполнения), определяющее количество заполненных уровней Ландау, равное числу электронов в образце N , деленному на число квантов магнитного потока $\Phi_0 = h/e$, пронизывающего образец:

$$\nu = \frac{N}{N_\Phi} = \frac{N}{\Phi/\Phi_0} = \frac{Ne}{\Phi h},$$

где Φ — поток магнитного поля через образец.

Модель свободных электронов. Распределение Ферми

5.318. Найти с помощью соотношения неопределенностей число свободных электронов с энергиями в интервале $(E, E + dE)$ в металле при температуре $T = 0$. Металл имеет форму прямоугольного параллелепипеда объемом V . При определении числа квантовых состояний электрона в данном интервале энергий считать, что физически различны только те состояния, у которых проекции импульса различаются не меньше чем на $\Delta p_x = 2\pi\hbar/l_x$, l_x — ребро «ящика» объема V (аналогично для Δp_y и Δp_z).

5.319. При каких условиях квантовомеханическая функция распределения Ферми-Дирака приближается к классической функции распределения частиц по энергии (распределению Больцмана)?

5.320. Оценить отношение средней потенциальной энергии взаимодействия двух электронов к энергии Ферми для металла, электроны которого наполовину заполняют зону проводимости. Концентрация атомов $n = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-3}$, эффективную массу электронов считать равной массе свободного электрона.

5.321. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа в нем равна 0°C ?

5.322. Вычислить энергию Ферми при $T = 0 \text{ К}$ для алюминия. Считать, что на каждый атом алюминия приходится три свободных электрона.

5.323. На какой высоте (в электронвольтах) от дна зоны проводимости находится уровень Ферми в одновалентном натрии, который содержит $2,5 \cdot 10^{23}$ атомов/ м^3 . Считать температуру $T = 0 \text{ К}$.

5.324. Найти разницу энергий (в единицах $k_B T$) между электроном, находящимся на уровне Ферми, и электронами, находящимися на уровнях, вероятности заполнения которых равны 0,20 и 0,80.

5.325. Какова вероятность заполнения электронами в металле энергетического уровня, расположенного на 0,001 эВ ниже уровня Ферми, при температуре 18°C ?

5.326. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, если уровень расположен на 0,01 эВ ниже уровня Ферми и температура изменяется от 200 до 300 К?

5.327. Определить, какая часть электронов проводимости в металле при $T = 0 \text{ К}$ имеет кинетическую энергию, большую $0,5 E_F$.

5.328. При какой температуре вероятность найти в проводнике электрон с энергией 0,5 эВ над уровнем Ферми равна 2%?

5.329. Электроны, находящиеся в тонком приповерхностном слое полупроводника, могут в определенных условиях рассматриваться как двумерный вырожденный электронный газ. Найти фермиевский импульс таких электронов, если их концентрация в расчете на единицу поверхности $n = 10^{17} \text{ м}^{-2}$.

5.330. Вычислить фермиевскую скорость носителей заряда в металле с одним электроном на элементарную ячейку и «одномерным» законом дисперсии $E = E_0 \cos k_z a$, где $E_0 = 0,5 \text{ эВ}$, $a = 3 \text{ \AA}$.

5.331. Вычислить в модели свободных электронов при $T = 0$ К плотность электронов вблизи уровня Ферми $E_F = 3$ эВ.

5.332. Найти интервал (в эВ) между соседними уровнями свободных электронов в металле при $T = 0$ К вблизи верхнего заполненного уровня (энергии Ферми), если объем металла равен 1 см^3 , а концентрация свободных электронов $n = 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

5.333. Найти связь между концентрацией электронов n и энергией Ферми при $T = 0$ К.

5.334. Чему равна максимальная энергия электронов в серебре, считая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону?

5.335. Определить число свободных электронов на атом меди и алюминия, граничные энергии для которых соответственно равны 7,04 и 11,7 эВ.

5.336. Давление электронного газа является одним из основных факторов, определяющих сжимаемость металлов. Найти сжимаемость и давление электронного газа для меди при температуре $T = 0$ К, если концентрация электронов проводимости $n = 8,5 \times 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Эффективную массу считать равной массе свободного электрона.

5.337. Сжимаемость щелочных металлов близка к сжимаемости электронного газа. Чему равен коэффициент сжимаемости металлического калия при $T = 0$ К, если концентрация свободных электронов в этом металле $n = 1,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$?

5.338. При увеличении всестороннего сжатия положение уровня Ферми в металле изменяется на 0,1%. Оценить, каково при этом относительное изменение дебаевской температуры кристалла Θ . Скорость звука s считать постоянной.

5.339. Для электронов с квадратичным законом дисперсии найти связь между их средней энергией и фермиевской энергией при температуре $T = 0$ К.

5.340. Вычислить среднюю кинетическую энергию свободных электронов в алюминии при $T = 0$ К, если известно, что их максимальная энергия равна 11,7 эВ.

5.341. Металлический натрий при кристаллизации образует кубическую объемно-центрированную решетку с расстоянием между ближайшими атомами $a = 3,7 \text{ \AA}$. Найти в модели свободных электронов среднюю кинетическую энергию электронов проводимости в этой решетке.

5.342. У дна зоны проводимости электроны обладают квадратичным законом дисперсии $E = Ak^2$, где константа $A = 5 \cdot 10^{-37} \text{ Дж} \cdot \text{м}^2$. Какова величина эффективной массы электронов?

5.343. Вычислить при $T = 0$ К фермиевскую энергию, импульс и скорость электронов металла с изотропным квадратичным законом дисперсии электронов, эффективная масса которых равна 0,8 массы свободного электрона, а концентрация 10^{29} м^{-3} .

5.344. Вывести формулу Ричардсона-Дешмана, определяющую плотность тока электронов, испускаемых термоэлектронным катодом

$$J = AT^2 \exp(-\varphi/k_B T),$$

где константа $A = 4\pi me k_B^2/h^3 = 120 \cdot 10^4 \text{ А}/(\text{м}^2 \text{К}^2)$. Величина φ есть работа выхода, которая зависит от материала катода и от состояния поверхности материала и обычно выражается в эВ.

5.345. Показать, что внешнее электростатическое поле E уменьшает работу выхода на величину $(eE/4\pi\epsilon_0)^{1/2}$ эВ (эффект Шоттки).

5.346. Насколько возрастет термоэлектронная эмиссия под действием приложенного к катоду электрического поля напряженностью 10^5 В/м , если рабочая температура катода 1000 К ?

5.347. Предположим, что анод и катод представляют собой плоскопараллельные пластины, расположенные на расстоянии $d = 1 \text{ см}$ друг от друга, и пространственный заряд не ограничивает величину тока. Температура катода равна $T = 2000 \text{ К}$. Какую разность потенциалов V надо приложить между катодом и анодом, чтобы эмиссионный ток увеличился на 10% по сравнению с формулой Ричардсона-Дешмана?

*Теплоемкость, теплопроводность
и электропроводность металлов*

5.348. Вычислить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при комнатной температуре. Считать, что на каждый атом приходится один свободный электрон и что теплоемкость серебра при данной температуре определяется законом Дюлонга и Пти.

5.349. Оценить решеточную и электронную теплоемкость серебра при температурах 300 К и 3 К . Дебаевская температура серебра $\Theta = 220 \text{ К}$, электронную теплоемкость считать по модели свободных электронов.

5.350. Для типичных значений параметров металлов оценить температуру, при которой сравниваются электронная и решеточная теплоемкости.

5.351. В одновалентных металлах при комнатной температуре длина свободного пробега электронов $\lambda_e = 10^{-3} \text{ м}$, скорость Ферми $v_F = 105 \text{ м/с}$, а $C_V = 0,1R$. Какова величина теплопроводности, обусловленная электронами?

5.352. При $T = 300 \text{ К}$ коэффициент теплопроводности германия равен $80 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, а его удельное сопротивление составляет $10^{-2} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Каково отношение его электронной теплопроводности к решеточной?

5.353. Удельное сопротивление сплава $\text{Ag}+1\%\text{Ni}$ при температуре $T \simeq 0 \text{ К}$ равно $\rho = 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Постоянная решетки $a = 3 \text{ \AA}$, решетку считать кубической, в зону проводимости каждый атом серебра отдает один электрон. Оценить величину сечения рассеяния электронов на атомах никеля.

5.354. Длина свободного пробега электронов в тонких проволоках из чистых металлов при низких температурах практически определяется их диаметром. Оценить, какова в этих условиях при $T = 10$ К эффективная удельная электропроводность медной проволоки диаметром $d = 0,1$ мм.

5.355. Оценить удельное сопротивление металла с $A = 100$ при температуре $T = 300$ К, считая, что радиус эффективного рассеяния электронов на фононах порядка амплитуды тепловых колебаний атомов, фермиевская скорость $v_F = 3 \cdot 10^6$ м/с, температура Дебая $\Theta = 200$ К.

5.356. Образец высокочистой меди имеет остаточное сопротивление 10^{-10} Ом·м, но при введении 0,1 атомного % ионов Cd^{2+} , оно увеличивается до $5 \cdot 10^{-10}$ Ом·м. Оценить, каково будет удельное сопротивление меди, если ввести 0,1 ат.% In^{3+} или Sn^{4+} .

Указание. При низких температурах сопротивление металла, обусловленное примесными ионами, пропорционально $(\Delta Z)^2$, где ΔZ — разница валентности примесных ионов и ионов металла.

5.357. Энергия Ферми алюминия равна 12 эВ, а его удельное сопротивление при $T = 300$ К равно $3 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Чему равна длина свободного пробега электронов проводимости и их дрейфовая скорость в поле напряженностью 1000 В/м? Атомный вес алюминия равен 27, плотность 2700 кг/м³.

5.358. Твердый водород является диэлектриком, плотность которого при нормальном давлении равна 76 кг/м³. Чтобы водород стал металлом, его энергия Ферми должна быть равной потенциалу ионизации. При каком давлении возможен переход водорода в металлическое состояние? Какой плотности это соответствует?

5.359. Современная технология позволяет методом молекулярной эпитаксии наносить на диэлектрическую подложку металлические проводники шириной d в несколько нанометров. Электроны движутся в таких проводниках практически без рассеяния и поэтому они фактически являются волноводами для электронных волн, и поэтому даже при $T = 0$ К проводимость мостика при достаточно малой концентрации электронов оказывается равной нулю. Начиная с каких значений поверхностной плотности электронов n сопротивление такого мостика с $d = 1$ мкм становится конечным?

Зонная теория. Собственные полупроводники

5.360. При сближении атомов возможен туннельный переход наружных электронов из одного атома в другой, что приводит к уширению уровней (образованию зон в твердом теле). Считая, что электрон находится в прямоугольной потенциальной яме шириной $a = 2r_B \simeq 1 \text{ \AA}$ на глубине, равной энергии ионизации $U_0 = 10$ эВ, а ширина барьера d равна среднему расстоянию между атомами, оценить энергетическое уширение в кристалле с $d = 1 \text{ \AA}$.

5.361. Ширина запрещенной зоны полупроводника равна 1 эВ. Какова вероятность заполнения электроном уровня вблизи дна зоны проводимости при температуре 290 К? Увеличится ли эта вероятность, если на полупроводник действует электромагнитное излучение с длиной волны 1,0 мкм; 2,0 мкм?

5.362. Хотя для простых собственных полупроводников энергия Ферми практически не зависит от температуры, небольшой по величине поправочный член надо вводить. Покажите, что энергия Ферми может быть записана в виде $E_F = \frac{1}{2}(E_c + E_v) + \alpha T$, где E_c и E_v энергии дна зоны проводимости и потолка валентной зоны соответственно, а α — константа. Предположите, что плотности состояний в полосах разрешенных значений энергии электронов имеют зависимость $A(E - E_c)^{1/2}$ и $B(E - E_v)^{1/2}$ соответственно.

5.363. В образце очень чистого германия край непрерывного оптического поглощения при $T = 300$ К соответствует $\lambda^{-1} = 5,5 \times 10^5 \text{ м}^{-1}$. Оцените, насколько надо увеличить температуру, чтобы при этом электропроводность возросла на 20%.

5.364. Найти минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон-дырка в кристалле GaAs, если его электропроводность изменяется в 10 раз при изменении температуры от $+20$ до -3° С .

Примесные полупроводники

5.365. В образец кремния внесено 10^{-4} атомных процентов атомов фосфора (доноров), которые при комнатной температуре оказываются все однократно ионизованными. Измерения подвижности электронов показали, что она составляет $0,15 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Рассчитайте, каково собственное удельное сопротивление кремния. Плотность кремния равна 2300 кг/м^3 , его атомный вес равен 28.

5.366. Образец германия n -типа содержит 10^{23} ионизованных доноров в 1 м^3 . Оценить отношение сопротивления этого образца при комнатной температуре к сопротивлению германия высокой чистоты.

5.367. В антимониде индия эффективная масса электрона примерно равна 0,01 массы электрона, а диэлектрическая постоянная равна 17. Оценить энергию ионизации донорных атомов и радиус электронной орбиты.

5.368. Полупроводник допирован как донорными атомами (10^{22} м^{-3}), так акцепторными ($5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$), причем их энергетические уровни расположены на расстоянии 10^{-2} эВ от потолка и дна запрещенной зоны соответственно. Подвижность носителей равна $0,2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Каково сопротивление этого образца при температуре 20 К?

Указание. Когда в полупроводнике имеется как n - так и p -типа примеси происходит так называемый эффект компенсации, т.е. доноры ионизуют акцепторы и тем самым уменьшается их эффективное число.

5.369. Полупроводниковый кристалл объемом 1 мм^3 допирован 10^{22} атомами донора в 1 м^3 , чтобы его можно было использовать в качестве детектора инфракрасного излучения с величиной $\lambda = 10^4 \text{ м}^{-1}$ за счет переброса носителей через щель величиной 10^{-2} эВ . Время жизни носителей равно 10^{-2} с , детектор охлаждается до 4 К . Оценить, во сколько раз изменится сопротивление полупроводника при облучении его мощностью 10^{-2} Вт . Считать, что в детекторе падающее излучение полностью поглощается.

5.370. Красная граница внешнего фотоэффекта сурьмяно-цезиевого фотокатода (при очень низкой температуре) соответствует $\lambda_1 = 0,65 \text{ мкм}$, а красная граница фотопроводимости — $\lambda_2 = 2,07 \text{ мкм}$. Определить в эВ положение дна зоны проводимости данного полупроводника относительно вакуума.

5.371. Ширина запрещенной зоны у германия равна $0,7 \text{ эВ}$. Насколько изменяется концентрация свободных носителей при увеличении температуры от комнатной (27°С) до 50°С ?

5.372. Удельное сопротивление чистого кремния при комнатной температуре равно $1000 \text{ Ом}\cdot\text{м}$, ширина запрещенной зоны $\Delta = 1,1 \text{ эВ}$. Предполагая, что эффективные плотности состояний и подвижности носителей не зависят от температуры, найти величину сопротивления кремния при температуре 50°С .

5.373. Оценить отношение электронной теплоемкости чистого германия к его решеточной теплоемкости при температуре 1000 К . Считать, что концентрация электронов проводимости $n_e = 1,5 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$, ширина запрещенной зоны $\Delta = 0,7 \text{ эВ}$, дебаевская температура $\Theta = 540 \text{ К}$, плотность атомов $N = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

5.374. Длинноволновый край полосы поглощения чистого германия лежит вблизи длины волны $\lambda_0 = 19 \text{ мкм}$. Оценить отсюда ширину запрещенной зоны германия (в эВ).

5.375. Германиевое фотосопротивление освещают монохроматическим излучением, равномерно поглощаемом во всем объеме. Удельное сопротивление образца равно $45 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, концентрация электронов и дырок повышается вследствие освещения на 10^{17} м^{-3} . Подвижности электронов и дырок равны $\mu_e = 0,38 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и $\mu_p = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Каково относительное изменение электропроводности пластинки германия?

5.376. Найти минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон-дырка в чистом теллуре, если известно, что его электропроводность возрастает в $\eta = 5,2$ раза при увеличении температуры от $T_1 = 300 \text{ К}$ до $T_2 = 400 \text{ К}$.

5.377. Вычислить удельное сопротивление полупроводника n -типа при температуре $T = 50 \text{ К}$, если известно, что концентрация донорных атомов $n = 5 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$, энергия их активации $E_d = 0,1 \text{ эВ}$, подвижность электронов $b = 0,05 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

p-n-переход

5.378. ($p-n$)-переход изготовлен из материала, характеризующегося при температуре $T = 300$ К концентрацией собственных носителей $n_i = 2 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$. Концентрации доноров и акцепторов по обе стороны перехода одинаковы равны $n = 6 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Определить величину потенциального барьера на переходе.

5.379. При комнатной температуре и при прямом смещении $0,15$ В через ($p-n$)-переход течет ток $I = 1,66$ мА. Какой ток пойдет через переход при обратном смещении?

5.380. При приложении к полупроводниковому диоду обратного смещения ток через диод обладает свойством насыщения. Каков механизм возникновения этого тока? Как изменится ток насыщения при понижении температуры от 20 до 0°C ? Диод изготовлен из материала с шириной запрещенной зоны $E_g = 0,7$ эВ.

5.381. Сопротивление ($p-n$)-перехода при малых напряжениях $R = 400$ Ом, а площадь $S = 0,5 \text{ см}^2$. Оценить максимальную плотность обратного тока (тока насыщения) при температуре $T = 300$ К.

5.382. Оценить, при какой температуре начнет исчезать эффект выпрямления в полупроводниковом диоде, у которого ширина запрещенной зоны $E_g = 1$ эВ, концентрации примесей по обе стороны перехода $n_{\text{пр}} = 10^{23} \text{ м}^{-3}$, а концентрация свободных носителей при температуре $T_0 = 300$ К равна $n_i = 2 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$.

Эффект Холла

5.383. Холловский датчик для измерения магнитного поля изготовлен в виде кубика, подвижность носителей равна $0,5 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Какое должно быть приложено напряжение, чтобы в поле 10^{-4} Тл холловская разность потенциалов была равна 1 мВ?

5.384. Вычислить величину ЭДС Холла, возникающую при пропускании тока 100 мА через пластинку из металлического натрия в поле $0,1$ Тл. Ширина образца, вдоль которой измеряется холловское напряжение и перпендикулярно которой приложено магнитное поле, равна $l = 1$ мм. Решетка Na — объемноцентрированный куб со стороной $4,28 \text{ \AA}$.

5.385. Вычислить удельную проводимость кристалла кремния, если константа Холла для него $R_H = -2,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$.

5.386. При каких условиях в полупроводнике, имеющем свободные носители заряда, тем не менее не наблюдается эффект Холла?

5.387. Определить подвижность в $[\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})]$ электронов в германии n -типа, у которого удельное сопротивление $\rho = 1,7$ Ом·см, а постоянная Холла $R_H = 7 \cdot 10^{-17} \text{ СГСЭ}$.

5.388. Определить знак, концентрацию и подвижность свободных носителей заряда в полупроводниковом образце, который обладает примесной проводимостью и сопротивлением 338 Ом. При токе 50 мА и магнитной индукции $0,1$ Тл холловская разность потенциалов в

образце равна 200 мВ. Размеры образца: толщина $b = 0,1$ мм, ширина $d = 5$ мм.

5.389. Пластика из полупроводника p -типа шириной $d = 1$ см и длиной $l = 3$ см помещена в однородное магнитное поле напряженностью $H = 0,5$ Тл. К концам пластинки (вдоль ребра с размером l) приложено постоянное напряжение $U = 180$ В. При этом поперечная холловская разность потенциалов оказалась равной $V = 5$ мВ. Определить концентрацию и подвижность дырок в данном полупроводнике, удельное сопротивление которого $\rho = 0,03$ Ом·м.

5.390. Константа Холла у алюминия равна $-0,3 \cdot 10^{-10}$ В·м/(А·Тл). Сколько электронов от каждого атома принимают участие в проводимости? Плотность алюминия 2700 кг/м³, атомный вес 27.

5.391. По цилиндрическому проводу протекает ток, плотность которого j однородна по сечению проводника. Концентрация электронов проводимости равна n . Пренебрегая сопротивлением и учитывая поле Холла, определить величину и направление вектора Пойнтинга в проводнике в зависимости от расстояния до оси r . Считать, что $\epsilon = \mu = 1$.

5.392. В квазиодномерном электронном газе, образующегося в МДП-структурах (металл-диэлектрик-полупроводник) или гетероструктурах (в последнем случае это, как правило, GaAs), при низких температурах и в сильных магнитных полях наблюдается целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ). Сущность этого эффекта состоит в том, что в зависимости холловского сопротивления от магнитного поля наблюдаются последовательные ступеньки (холловские плато), причем величина холловского сопротивления на этих плато пропорциональна кванту холловского сопротивления, определяемому только фундаментальными константами, и не зависит от параметров материала структуры. Исходя из соотношений размерности, найти величину кванта холловского сопротивления ΔR_k при ЦКЭХ.

5.393. Холловское сопротивление МДП-структуры в магнитном поле $B = 2,5$ Тл равно $R_H = 4,3$ кОм. Какова плотность электронов?

5.394. Для наблюдения дробного квантового эффекта Холла, при котором фактор заполнения оказывается не целым, а дробным числом, необходимо, чтобы кулоновское взаимодействие U между электронами было существенно больше их кинетической энергии E . Оценить, насколько надо изменить плотность электронов в двумерном электронном газе, чтобы отношение U/E увеличилось в 10 раз?

10. Сверхпроводимость

1. Конфигурация магнитного поля внутри сверхпроводящего образца должна удовлетворять уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda_L^2,$$

которое впервые было предложено братьями Ф. Лондоном и Г. Лондоном и носит название уравнение Лондонов. Для плоской поверх-

ности в параллельном ей поле решение имеет вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(-x/\lambda_L),$$

где $\mathbf{B}_0$ — значение $\mathbf{B}$ на поверхности, x — расстояние от поверхности в глубину образца, а

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$$

характерная глубина проникновения для сверхпроводника с концентрацией сверхпроводящих электронов n_s (как правило считается, что концентрация сверхпроводящих электронных пар вдвое меньше концентрации электронов, так как электрический ток в сверхпроводящей фазе переносится парами) называется *лондоновской длиной*.

2. Установление парных корреляций между электронами при температурах ниже критической T_c приводит к понижению их энергии и образованию в спектре электронных возбуждений энергетической щели Δ . По теории БКШ

$$2\Delta_0 = 3,52k_B T_c,$$

здесь Δ_0 — величина щели при нулевой температуре.

3. Эффективное число электронов, участвующих в спаривании, равно

$$n_{\text{эф}} = \frac{\Delta}{E_F} n,$$

и тем самым энергия спаривания (энергия электронов в сверхпроводящем конденсате)

$$E_c \simeq \frac{\Delta}{E_F} n \Delta = \frac{n \Delta^2}{E_F}.$$

4. Микроскопическое состояние сверхпроводника характеризуется кроме лондоновской длины еще одним параметром длины — *длиной когерентности*

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{\Delta}.$$

где v_F — фермиевская скорость электронов. Длина когерентности определяет характерный масштаб, на котором «залечиваются» нарушения сверхпроводящего упорядочения.

5. В магнитном поле образование сверхпроводящих куперовских пар будет происходить в образце до тех пор, пока энергия, которую выиграл образец за счет перехода в сверхпроводящее состояние, будет превышать энергетические затраты на вытеснение магнитного поля $\propto (B^2/2\mu_0)V$ (V — объем образца).

6. В сверхпроводниках второго рода возможно смешанное состояние, когда в объеме возникают квантованные вихревые нити, сердцевина которых находится в нормальном состоянии.

Каждый вихрь несет в себе квант магнитного потока

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}.$$

Вихри начинают проникать в сверхпроводник при значении магнитного поля, больше так называемого первого критического поля, индукция которого определяется соотношением

$$B_{c1} = \mu_0 H_{c1} \simeq \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_L^2}.$$

Полностью переход сверхпроводников второго рода в нормальное состояние происходит в поле (второе критическое поле):

$$B_{c2} \simeq \frac{\Phi_0}{\pi \xi^2}.$$

5.395. В 1911г. Г. Камерлинг-Оннес при измерении сопротивления ртути, охлаждаемой жидким гелием, обнаружил, что при откачке паров гелия из криостата сопротивление ртути исчезает. Так было открыто явление сверхпроводимости. Вычислить, до какого давления надо было откачивать пары гелия, если при давлении $p_k = 1$ атм температура кипения гелия $T_k = 4,22$ К, теплота испарения при этом давлении $q = 84$ Дж/моль, а критическая температура сверхпроводящего перехода ртути $T_c = 4,15$ К.

5.396. При каком напряжении V начнет течь ток через туннельный переход металл-изолятор-сверхпроводник, если $T_c = 92$ К, а измерения проводятся при $T \ll T_c$?

5.397. Из широкой сверхпроводящей ленты был свернут длинный цилиндр радиусом $a = 1$ см и края ленты сварены вдоль образующей. Измерения показали, что электрический контакт в месте сварки оказался не очень хорошим, поскольку за один час ток в кольце уменьшился на 1%. Каково сопротивление R единицы длины сварного шва?

5.398. В 1964 г. Крибье с сотрудниками с помощью упругого рассеяния нейтронов на ниобии экспериментально подтвердил, что в сверхпроводниках II рода в магнитном поле $B > B_{c1}$ образуется треугольная вихревая решетка Абрикосова. В опытах наблюдался максимум первого порядка в отражении нейтронов с длиной волны $\lambda = 5$ Å под углом $\theta = 20'$ по отношению к падающему пучку от плоскостей, разделенных расстоянием h (высота равностороннего треугольника структуры). В каком магнитном поле проводился эксперимент?

5.399. Точечный магнитный диполь с магнитным моментом $\mu = 1$ А·м² висит над поверхностью сверхпроводника I рода (температура $T \simeq 0$ К), у которого критическое магнитное поле $B_c = 0,05$ Тл. Ось диполя перпендикулярна плоскости. Какова максимально допустимая масса m диполя?

5.400. Какой максимальный ток течет по поверхности сверхпроводника I рода, если $B_c = 4 \cdot 10^4$ А/м, а $\lambda_L = 0,5 \cdot 10^{-7}$ м?

5.401. Дивер и Фербенк наблюдали квантование магнитного потока в длинной оловянной трубочке с внутренним диаметром $d = 15$ мкм. Какому магнитному полю соответствует один квант магнитного потока через сечение такой трубки?

5.402. Оценить неоднородность магнитного поля в сверхпроводящей пленке толщиной, много меньшей лондоновской длины.

5.403. Индуктивностью резонансного контура ($\nu_0 = 10$ МГц) служит длинная однослойная катушка диаметром $d = 10$ мм. Насколько изменится резонансная частота контура, если внутрь катушки вставлен на всю длину сверхпроводящий цилиндр диаметром $d/2$? Концентрация сверхпроводящих электронов $n_s = 10^{28} \text{ м}^{-3}$, температура $T \ll T_c$.

5.404. Оценить в электронвольтах величину энергетической щели (энергию спаривания электронов) в свинце, у которого критическая температура $T_c = 7,2$ К.

5.405. Оценить в электронвольтах энергию электрона в сверхпроводнике в критическом магнитном поле при $T = 0$ К, если известно, что $T_c = 10$ К, постоянная решетки $a = 3 \text{ \AA}$.

5.406. Тантал кристаллизуется в объемно-центрированную кубическую решетку с ребром $a = 3 \text{ \AA}$, и является сверхпроводником I рода с $T_c = 4,4$ К. Считая, что каждый атом тантала отдает в зону проводимости один электрон, эффективная масса которого равна массе свободного электрона, оценить из энергетических соображений величину индукции критического магнитного поля B_c при $T \simeq 0$ К как поля, в котором разрушаются куперовские пары.

5.407. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить характерный линейный размер (длину когерентности ξ) электронной пары в сверхпроводнике с энергетической щелью 3 мэВ в электронном спектре. Учесть, что в образовании пары участвуют электроны вблизи поверхности Ферми, скорость которых принять равной $v_F = 106 \text{ м/с}$.

5.408. В сверхпроводнике электроны образуют пары с противоположно направленными спинами (куперовские пары). В каком магнитном поле произойдет разрушение таких пар, сопровождаемое изменением спина электронной системы, если в нулевом поле критическая температура сверхпроводника равна $T_c = 92$ К?

5.409. Длинный цилиндр из сверхпроводника II рода, у которого нижнее критическое поле $B_{c1} = 0,04$ Тл, помещен в магнитное поле $B = 0,05$ Тл, параллельное его образующей. При этом его намагниченность составила половину того значения, которое было при $B = B_{c1}$. Оценить среднее расстояние между вихрями магнитного потока в этом поле.

5.410. У высокотемпературного сверхпроводника $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ нижнее критическое поле равно $B_{c1} \simeq 0,1$ Тл, а верхнее $B_{c2} \simeq 10^2$ Тл. Оценить глубину проникновения λ и длину когерентности ξ в этом соединении при $T = 0$ К.

5.411. Найти зависимость скорости сверхпроводящих электронов от расстояния до оси кванта магнитного потока, проникшего в сверхпроводник.

5.412. Длинный цилиндр из сверхпроводника II рода с массой $M = 25$ г и с высотой $l = 10$ см подвешен на тонкой нити. Вдоль оси цилиндра прикладывается такое магнитное поле $H = 10^4 \text{ Э} \gg H_{c1}$,

что индукция $B \simeq \mu_0 H$. Вначале, когда температура цилиндра была $T < T_c$, цилиндр покоился, а затем температура поднялась выше критической. Найти установившуюся угловую частоту вращения цилиндра. Глубина проникновения магнитного поля $\lambda = 10^{-7}$ м, плотность сверхпроводящих электронов $n_s = 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

5.413. Плоская лента ширины $b = 0,5$ см из сверхпроводника II рода в смешанном состоянии помещена в магнитное поле $B = 10$ Тл, перпендикулярное поверхности ленты и много большее величины первого критического поля. По ленте без диссипации течет ток $I = 10$ А. Вихри, удерживаемые дефектами сверхпроводника, при этом неподвижны. Вычислить силу F , действующую на отдельный вихрь со стороны дефектов кристалла. Считать, что ток распределен по образцу однородно, а вихревую структуру создают другие, независимые от I токи.

11. Магнетизм веществ

1. *Восприимчивостью* веществ называется отношение магнитного момента единицы объема I к внешнему полю H , т.е. в соотношении $I = \chi H$ под восприимчивостью подразумевается объемная восприимчивость. Часто для характеристики магнитных свойств веществ используют удельную магнитную восприимчивость (т.е. магнитную восприимчивость единицы массы): $\chi = \chi_v / \rho$, где ρ — плотность вещества, а χ_v — магнитная восприимчивость единицы объема. Кроме того, магнитную восприимчивость иногда относят к одному молю вещества (χ_m). Величины χ и χ_m связаны между собой соотношением $\chi_m = \chi M$, здесь M — относительная молекулярная масса. Объемная восприимчивость величина безразмерная, тогда как размерность удельной восприимчивости равна $\text{м}^3/\text{кг}$, а молярной — $\text{м}^3/\text{кмоль}$.

2. *Диамагнетизм.* Магнитная восприимчивость диамагнетиков определяется выражением (формула Ланжевена)

$$\chi = -\frac{\mu_0 e^2 \bar{a}^2 N}{6m} Z.$$

Здесь $\bar{a}^2$ — средний квадрат расстояния электрона от ядра, N — число атомов в единице объема, Z — заряд ядра атомов диамагнетика.

3. *Парамагнетизм.* Вещества, атомы которых обладают нескомпенсированным магнитным моментом, принадлежат к парамагнетикам (при температурах выше температуры магнитного упорядочения — температуры Кюри T_C — ферромагнетики также являются парамагнетиками). Если полный момент атома $\mathbf{J}$, то парамагнитная часть восприимчивости равна

$$\chi = \frac{N \mu_0 g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T}.$$

В этой формуле g — фактор Ланде, определяющий связь между магнитным и полным моментом системы. Для ионов группы железа (Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu) происходит «замораживание» орбитального момента и их парамагнетизм обусловлен только спином их внешней d -оболочки, и поэтому в формуле для парамагнитной восприимчивости необходимо заменить J на S и множитель Ланде у них $g = g_s = 2$. Если магнитный момент атома определяется лишь спином одного внешнего электрона, т.е. $S = 1/2$, эта формула приобретает вид

$$\chi = \frac{I}{H} = N \frac{\mu_0 \mu^2}{k_B T} = N \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T}.$$

Полученная формула носит название закона Кюри и показывает, что магнитная восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна температуре.

4. *Ферромагнетизм.* В феноменологической теории ферромагнетизма, построенной П. Вейссом в 1907г., для описания взаимодействия соседних электронов предполагается, что в ферромагнетике имеется некоторое эффективное магнитное поле $H_{\text{эф}}$ (это поле называют также *обменным* в силу его квантовомеханической природы). Величина обменного поля пропорциональна имеющейся намагниченности (количеству электронов с коррелированными направлениями магнитных моментов)

$$H_{\text{эф}} = \lambda I,$$

где λ — некоторая константа, положительная у ферро- и отрицательная у антиферромагнетиков.

Температурная зависимость восприимчивости ферромагнетика в парамагнитной фазе определяется формулой Кюри-Вейсса

$$\chi = \frac{1}{H} = N \frac{\mu_0 g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B(T - \Theta)} \propto \frac{1}{T - \Theta},$$

где величина

$$\Theta = \frac{N \mu_0 \langle \mu^2 \rangle \lambda}{3k_B}$$

называется парамагнитной точкой Кюри.

Простейшая модель ферромагнетизма основывается на представлении, что вся обусловленная принципом Паули зависимость энергии от намагниченности проявляется посредством энергии обмена, и фактически она является непосредственным обобщением теории молекулы водорода на случай большого числа атомов. *Обменная энергия* кристалла есть сумма обменных энергий между соседними атомами и записывается следующим образом:

$$U_{\text{обм}} = -2 \sum' J_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j,$$

где $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$ — скалярное произведение векторов i -го и j -го спина

(энергия взаимодействия записана в виде, аналогичном взаимодействию двух магнитных диполей), а штрих у знака суммы означает, что при суммировании, чтобы не учитывать каждую пару дважды, надо считать, что $i < j$. Так как в квантовой механике проекции спина на заданную ось могут принимать лишь дискретные значения, то и скалярное произведение $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$ принимает лишь дискретные значения.

Если обменный интеграл положителен, то низшую энергию имеет симметричное состояние и простейшим примером является ферромагнитное состояние, а если он отрицателен, то низшую энергию имеет антисимметричное состояние и этот случай соответствует антиферромагнитному состоянию с антипараллельными спинами.

5. В системе упорядоченных спинов возможны своеобразные возбуждения спиновой системы — спиновые волны, — которые представляют собой колебания относительной ориентации спинов в решетке. В пределе длинных волн $ka \ll 1$ закон дисперсии оказывается квадратичным по волновому числу k :

$$\hbar\omega = (2JSa^2)k^2.$$

5.414. Исходя из формулы для ларморовой частоты прецессии показать, что диамагнитная восприимчивость атомарного газа определяется приближенно формулой

$$\chi = -\frac{\mu_0 Z e^2 N}{6m} \overline{r^2},$$

где N — число атомов, Z — их порядковый номер, $\overline{r^2}$ — средний квадрат расстояний электронов от ядра.

5.415. Основной вклад в диамагнетизм вносят внешние электроны атомов. У атома хлора 8 внешних электронов, а его диамагнитная восприимчивость равна $-30,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{кмоль}$. Оценить радиус наружной электронной оболочки атома хлора.

5.416. В бензине (C_6H_6) углеродные атомы образуют правильные шестиугольники (гексагоны) со стороной $a = 1,4 \text{ \AA}$. Волновая функция каждого внешнего электрона от углеродного атома простирается на все кольцо атомов. Оценить вклад этих электронов в удельную диамагнитную восприимчивость жидкого бензина, плотность которого равна $0,88 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

5.417. Вычислить молярную диамагнитную восприимчивость атомарного водорода в основном состоянии, для которого волновая функция имеет вид

$$\psi(r) = (\pi r_1^3)^{1/2} \exp(-r/r_1),$$

где r_1 — первый боровский радиус.

5.418. Вывести выражение для магнитной восприимчивости слабого раствора постоянных диполей, магнитный момент каждого из которых равен M , в предположении, что диполи ориентированы произвольно относительно направления слабого магнитного поля, т.е. когда магнитная энергия диполя $MB \ll k_B T$. Какова будет восприимчивость, если диполи ориентированы лишь по или против поля?

5.419. Найти магнитный момент парамагнитного газа, состоящего из N атомов в состоянии $^2S_{1/2}$ при температуре T в магнитном поле B , при условии $\mu B \ll k_B T$.

5.420. Рассчитать парамагнитную восприимчивость 1 см^3 газообразного кислорода, находящегося в слабом магнитном поле при нормальных условиях. Магнитный момент молекулы кислорода $\mu = 2,8\mu_B$.

5.421. Длинный парамагнитный стержень диаметром $d = 5 \text{ мм}$ сбалансирован на весах, причем один конец стержня находится между полюсами магнита, создающего горизонтальное магнитное поле, а другой в области, где это поле мало. Если магнитная индукция поля равна $B = 1 \text{ Тл}$, то кажущееся увеличение массы стержня $1,5 \text{ г}$. Какова магнитная восприимчивость материала стержня? Такой метод измерения магнитной восприимчивости называется методом Гюи.

5.422. Магнитная восприимчивость жидкого ^3He выше температуры 1 К ведет себя точно по закону Кюри, т.е. $\chi \propto 1/T$. Вычислить величину удельной восприимчивости ^3He при температуре $T = 2 \text{ К}$. Плотность ^3He при этой температуре равна $\rho = 0,07 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

5.423. Известно, что щелочные металлы обнаруживают парамагнетизм, не зависящий от температуры. Он может быть объяснен следующим образом. При включении внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ свободные электроны с антипараллельными вектору $\mathbf{H}$ спинами начнут поворачиваться вдоль $\mathbf{H}$, но при этом в соответствии с принципом Паули они будут переходить на более высокие незанятые энергетические уровни. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока уменьшение магнитной энергии электронов не сравняется с увеличением их кинетической энергии. Найти отсюда величину парамагнитной восприимчивости металла объемом 1 см^3 в слабом магнитном поле, если концентрация электронов равна $2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

5.424. Оценить величину молекулярного поля (поля Вейсса) в железе, температура Кюри которого $\Theta = 770^\circ\text{C}$.

5.425. Атомы, обладающие магнитным моментом, могли бы образовывать упорядоченную структуру за счет магнитного взаимодействия. Оценить, при какой максимальной температуре это еще возможно, если межатомное расстояние порядка постоянной решетки в твердом теле $a = 3 \text{ \AA}$.

5.426. Учитывая, что в ферромагнетике имеется обменное поле $H_{\text{эф}}$, получить выражение для его парамагнитной восприимчиво-

сти (закон Кюри-Вейсса)

$$\chi \propto \frac{1}{T - \Theta}.$$

5.427. Считая известным, что обменный интеграл J для электронной конфигурации молекулы водорода отрицателен, показать, что синглетное состояние (состояние с антипараллельными спинами) обладает более низкой энергией, чем триплетное (состояние с параллельными спинами).

5.428. Оценить энергию обменного взаимодействия (в эВ) в никеле, в котором упорядочение электронных спинов происходит при температуре Кюри $T_C = 358^\circ\text{C}$.

5.429. В гадолинии, который принадлежит к группе редкоземельных элементов, магнетизм обусловлен спиновым магнитным моментом $4f$ -оболочки, расположенной в «глубине» атома. У каждого иона Gd имеется $n = 12$ ближайших соседей, а среднее значение спина $S = 7/2$. Оценить величину обменного интеграла в Gd, у которого температура Кюри $T_C = 293\text{ K}$.

5.430. В феноменологической теории ферромагнетизма Вейсса каждый магнитный атом испытывает действие эффективного поля $H_{\text{эф}}$, тогда как в квантовой теории Гейзенберга-Френкеля энергия взаимодействия атомов выражается соотношением $U_{\text{обм}} = -2JS_iS_j$ (S_iS_j — спины взаимодействующих атомов). Учитывая взаимодействие атома только с n ближайшими соседями и считая его с ними одинаковым, найти связь феноменологической константы Вейсса с обменным интегралом J . Объем V , приходящийся на один атом, считать заданным.

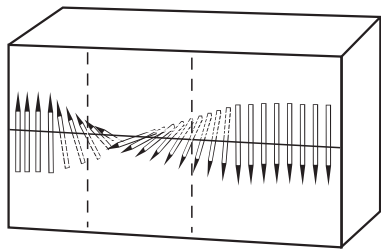


Рис. 5.20

5.431. Два соседних домена, намагниченных в различных направлениях, всегда разделены переходным слоем конечной толщины (стенкой Блоха), в котором происходит постепенный поворот спинов (см. рис. 5.20). Оценить толщину этого переходного слоя для кристалла железа, у которого направления намагниченности в соседних

слоях антипараллельны, температура Кюри $T_C = 1043\text{ K}$, постоянная решетки $a = 3,6\text{ \AA}$, а энергия анизотропии $K = 4 \cdot 10^4\text{ Дж/м}^3$. Спин атома железа считать равным $S = 1$.

Указание. Энергией анизотропии называется разность энергии намагничивания вдоль легкой и трудной осей.

5.432. В ферромагнетиках при низких температурах заметный вклад в тепловые процессы вносят колебания в системе поляризованных спиновых моментов — спиновые волны, для которых закон дисперсии имеет вид $\omega = Ak^2$, а среднее число квантов —

магнонов — в тепловом равновесии определяется той же формулой Планка, что и для фононов. Выяснить характер температурной зависимости вклада магнонов в теплоемкость ферромагнетиков.

5.433. В антиферромагнетиках (спиново упорядоченных магнетиках с антипараллельными магнитными моментами соседних атомов) закон дисперсии длинноволновых магнонов (см. пред. задачу) имеет вид $\omega = |\vec{k}|v$, где скорость $v = \text{const}$. Отличительным свойством магнонов в антиферромагнетиках является то, что для каждого значения $\vec{k}$ возможны два состояния поляризации. Найти отношение вкладов магнонов и фононов в теплоемкость при низких температурах для кристалла с величиной $v = 3,0 \cdot 10^3$ м/с и усредненной скоростью звука $s = 5,0 \cdot 10^3$ м/с.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава I. Механика

Глава II. Электричество и магнетизм

Глава III. Колебания и волны

Глава IV. Квантовая физика

Глава V. Статистическая физика и термодинамика

Г л а в а I

МЕХАНИКА

1. Кинематика материальной точки

$$1.1. \quad v(t) = \pm \int_{t_0}^{t_1} |a(t)| dt \equiv \pm I.$$

$$t_x = \begin{cases} t_1, & \text{когда } v(t) = v_0 + I \text{ (направления } \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{v} \text{ совпадают)}, \\ t_1, & \text{когда } v(t) = v_0 - I, \text{ если } I > 2|v_0|, \\ t_0, & \text{когда } v(t) = v_0 + I, \text{ если } I < 2|v_0|. \end{cases}$$

$$1.2. \quad \alpha = 3\pi/8.$$

$$1.3. \quad \varphi = \pi/8.$$

$$1.4. \quad \alpha = \pi/6.$$

1.7. Условие возврата шарика на траекторию падения после завершения подъема $v_0^2 \sin 2\alpha = Dg$. Число соударений за период движения в цилиндре $N = 2k + 3$, где k — число ударов шарика за время его движения от первого удара о стенку до первого удара о дно.

1.8. Тень движется с запада на восток со скоростью, равной $2\pi \left(\frac{R_{\text{Л}}}{T_{\text{мес}}} - \frac{R_{\text{З}}}{T_{\text{сут}}} \right) \approx 0,5 \text{ км/с}$, где $T_{\text{мес}}$ — продолжительность месяца, $T_{\text{сут}}$ — продолжительность суток.

1.9. Нет; $a_r = \omega^2 R$ и направлено к центру обруча.

1.10. $x = R(\varphi - \sin \varphi) = R(\omega t - \sin \omega t)$, $y = R(1 - \cos \varphi) = R(1 - \cos \omega t)$, где $\varphi = \omega t$ и $\omega = v/R$ есть угловая скорость вращения колеса. Траекторией точек, находящихся на ободе движущегося колеса, будет простая циклоида, уравнения которой в параметрической форме и получены (рис.1.1').

1.11. *Решение.* Координата y произвольной точки на ободе колеса (см. рис. 1.5 к задаче 1.10.) может быть записана следующим образом:

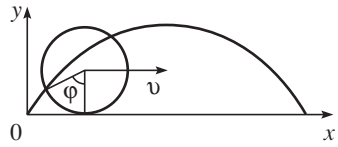


Рис. 1.1'

$$y = R \left(1 - \cos \frac{vt}{R} \right), \quad \text{откуда } \dot{y} = v \sin \frac{vt}{R}.$$

Величины y , $\dot{y}$ и h связаны соотношением

$$h = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}.$$

Подстановкой в последнее выражение находим

$$h_{\text{max}} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2},$$

из условия $dh/d\varphi = 0$. После этого получаем

$$(\cos \varphi)_{h_{\text{max}}} = -\frac{Rg}{v^2}.$$

$$1.12. \rho = \frac{(v_0^2 + \omega^2 R^2)^{3/2}}{\omega^3 R^2}.$$

$$1.13. \rho = \frac{(v_0 \cos \alpha + \omega R)^2}{\omega^2 R + g}.$$

1.14. При повороте автомобиля его внешние и внутренние (по отношению к центру закруления дороги) колеса описывают разные окружности, т.е. проходят разные пути, и угловая скорость вращения колес, если они не скользят по дороге, должна быть различной. Это условие для задних ведущих колес обеспечивает дифференциал в заднем мосту автомобиля. Колеса, не имеющие привода от мотора, могут вращаться независимо друг от друга с различной угловой скоростью, так как они установлены на подшипниках.

2. Динамика материальной точки

$$1.15. a = \frac{m}{m+M}g; \quad T = \frac{Mm}{m+M}g.$$

$$1.16. a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2}g, \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin \alpha)g.$$

$$1.17. m_3 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$1.18. m_3 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

1.19. Силы становятся равными, когда длина свешивающейся части нити принимает значение $x_1 = \frac{3}{5}l$; $T = \frac{2}{5}mg$; $\ddot{x}_1 = \frac{3}{5}g$.

$$1.20. \text{ При } k < \frac{m}{M} \quad a \geq \frac{(m-M)gH}{ML - mH}, \text{ при } k \geq \frac{m}{M} \text{ ускорение любое.}$$

1.21. Обезьяна и груз поднимутся на расстояния $3l/4$ и $l/4$, а шест опустится на $l/4$.

$$1.22. F > 0,25(M+m)g + 0,5(M+m)g \approx 22,5 \text{ Н.}$$

$$1.23. t = \frac{v_0}{g(k_1 + k_2)(1 + m/M)}.$$

1.24. Будет двигаться; $a_1 = g \left[\sin \alpha - k_1 \cos \alpha - (k_1 - k_2) \frac{m_2}{m_1} \cos \alpha \right]$; $a_2 = g(\sin \alpha - k_2 \cos \alpha)$, т.е. $a_2 > a_1$. При $k_1 < k_2 < \tan \alpha$ $a_1 = a_2 = g(\sin \alpha - k_1 \cos \alpha)$.

$$1.25. x(t) = L(1 - e^{-\gamma t/M}); \quad x(\infty) = \frac{v_0}{\gamma} M = L.$$

$$1.26. v(t) = v_0 \cos \alpha - k(v_0 \sin \alpha + gt).$$

$$1.27. \alpha = \frac{4kh\Delta}{l^2} = 0,032 \text{ рад} \approx 1^\circ 50'.$$

$$1.28. S_1 = 2S_0 \left(1 - \frac{kh}{l} \right) = 1,6S_0; \quad S_2 = 2S_0 \left(1 + \frac{kh}{l} \right) = 2,4S_0.$$

$$1.29. F = \frac{(k_1 + k_2)Mgl}{2[l - h(k_1 - k_2)]}.$$

$$1.30. \tau = \frac{m}{2kv} = 50 \text{ с.}$$

1.31. $t_1 = t_0 \frac{v_*}{v_0} \ln \left(1 + \frac{v_0}{v_*} \right)$, где v_* — скорость установившегося движения в вязкой среде, $t_0 = v_0/g$.

$$1.32. H = \frac{v_1^2}{g} \left[\frac{v_0}{v_1} \sin \alpha - \ln \left(1 + \frac{v_0}{v_1} \sin \alpha \right) \right] \approx 1,6 \text{ км}; \quad \tau \approx 14 \text{ с.}$$

1.33. 1) $\Delta S = g\tau \left(t + \frac{\tau}{2} \right)$; 2) $\Delta S = v_0 \left[\tau + \frac{m}{r} e^{-r\tau/m} (1 - e^{-r\tau/m}) \right]$, где v_0 — скорость установившегося движения каплей, r — коэффициент сопротивления при падении каплей в воздухе. Время t отсчитывается от начала падения первой капли.

$$1.34. x(t) = \frac{mv_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t/m}), \text{ т.е. если глубина океана не ограничивает времени падения } x_{\max} = \frac{mv_0}{\beta} = 50 \text{ м.}$$

1.35. С точностью до размеров колобка $H = \left(\frac{m}{\beta} \right)^2 \frac{g'}{e} \approx 0,7 \text{ м}$, где $g' = \frac{g}{21}$ — ускорение свободного падения с учетом архимедовой силы.

$$1.36. t = \frac{R}{v_0} (e^{\pi k} - 1).$$

$$1.37. a_{\max} = 5 \text{ м/с}^2; \quad a_{\min} = 0,625 \text{ м/с}^2; \quad k \geq 0,5.$$

$$1.38. v = \sqrt{Rg \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$1.39. R = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}.$$

Указание. Когда самолет летит прямолинейно, плоскость крыла горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на то же угол, т.е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

$$1.40. F = \frac{PL}{R} = 1,75 \text{ кН.}$$

$$1.41. v = \sqrt{gl \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right)}, \text{ где } \varphi = \frac{d^2 + l^2 + R^2}{2ld}.$$

$$1.42. F_x = Fe^{-4} \approx 183 \text{ Н.}$$

1.43. Если a_1 — ускорение в сторону груза массы m_1 , а a_2 — ускорение системы в сторону груза m_2 , то $a_1 = \frac{m_1 - m_2 e^{k\pi}}{m_1 + m_2 e^{k\pi}}$; $a_2 = \frac{m_2 - m_1 e^{k\pi}}{m_2 + m_1 e^{k\pi}}$. Условие неподвижности системы $e^{-k\pi} < \frac{m_2}{m_1} < e^{k\pi}$.

$$1.44. \Delta l = \frac{1}{2k} \frac{Mm}{M+m} g.$$

$$1.45. k \geq \frac{l}{2R} + \frac{R}{2l}.$$

3. Движение тела с переменной массой

1.46. Ускорение платформы $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M - \delta mt}$. Интегрируя это уравнение и учитывая, что $v = 0$ при $t = 0$, получаем $v = \frac{F}{\delta m} \ln \frac{M}{M - \delta mt}$.

$$1.47. M = M_0 \left[\exp \left(\frac{\mu L}{v_0 M} \right) - 1 \right].$$

$$1.48. v_1 = v_0 \exp\left(-\frac{\mu t}{m_0}\right); v_2 = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \mu}.$$

$$1.49. v = \frac{2}{3} \sqrt{2q} \frac{\rho \pi r^2 H^{3/2}}{M}.$$

$$1.50. \tau = \frac{v_0}{g} \left(1 + 2 \frac{M_0}{\Delta m}\right).$$

$$1.51. x = 4,5 (\ln 10)^2 \frac{u}{\lambda} \approx 24 \frac{u}{\lambda}.$$

$$1.52. L = \left(v_0 + \frac{u}{2}\right) \sqrt{\frac{2H}{g}} = 32 \text{ км}.$$

1.53. *Решение.* Уравнение движения ракеты

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - mg$$

перепишем в форме

$$m \frac{d}{dt}(v + gt) = -u \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d(u + gt)}{dm} = -\frac{u}{m}.$$

Это дает

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v + gt}{u}\right), \quad v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Величина μ , очевидно, равна $-\frac{dm}{dt}$ и находится из условия, что для неподвижной

ракеты $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u} \exp\left(-\frac{g}{u} t\right).$$

$$1.54. t = \frac{u}{g} \ln\left(1 + \frac{m_0}{m_1 + m_2}\right) = 22 \text{ с. Приблизненно, ввиду малости } \frac{m_0}{m_1 + m_2},$$

получаем: $t \approx \frac{m_0}{m_1 + m_2} \frac{u}{g} = 25 \text{ с}$, $l = vt = 220 \text{ м}$.

$$1.55. \frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v_0 + g\tau/6}{u}\right) \approx e^{1,1} \approx 3.$$

$$1.56. \Delta v = u \ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha - k}\right) = 3,4 \text{ км/с}.$$

1.57. Первый способ требует меньшей затраты топлива.

$$1.58. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{g}.$$

$$1.59. T_2 = \frac{m_0^2 - (m_0 - \alpha T_1)^2}{\alpha m_0} = 19 \text{ с}.$$

4. Работа и энергия, законы сохранения энергии и импульса

$$1.60. \Delta v_x \approx 6,3 \text{ см/с}; A \approx 45 \text{ эрг}.$$

$$1.61. v_c > v_a > v_b.$$

$$1.62. A = mg(H + kL).$$

$$1.63. N_{\max} = N + mgv \sin \alpha \approx 81,2 \text{ л.с}.$$

$$1.64. k = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \approx 0,05.$$

$$1.65. v_1 = \frac{m_1(v+u) + mv}{m+m_1}; \quad v_2 = v; \quad v_3 = \frac{m_1(v-u) + mv}{m+m_1}.$$

$$1.66. v = \frac{1}{2}\sqrt{k g L}.$$

$$1.67. v = \sqrt{\frac{2M}{m(M+m)}\left(\frac{kx_0^2}{2} - \alpha mgL\right)}.$$

$$1.68. t = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$1.69. x = \frac{m}{M+m}(a-b).$$

$$1.70. \text{ а) } v^2 \geq 4gl; \quad \text{ б) } v^2 \geq 5gl.$$

Указание. Во втором случае скорость в верхней точке должна быть достаточно велика, чтобы сила тяжести не превышала необходимой центростремительной силы.

$$1.71. \text{ Бруски имеют длину } l = \frac{v_0^2}{6kg}.$$

$$1.72. S = \frac{l_0 F_2^2}{4mgF_1} = 37,5 \text{ м.}$$

1.73. Ящик не будет двигаться, потому что сообщаемая ему нормальная p_n и тангенциальная p_t (по отношению к наклонной плоскости) слагающие импульса $\mathbf{p}$ вертикально падающего тела будут удовлетворять соотношению $p_n/p_t = \operatorname{tg} \alpha$, которому удовлетворяют слагающие веса ящика $mg_n/mg_t = \operatorname{tg} \alpha = k$, а в результате действия последних ящик не приходит в движение. После полной остановки падающего тела в ящике увеличение веса ящика по той же причине не приведет его в движение.

$$1.74. \tau = \frac{1}{2g} \left(\frac{V - kv \cos \alpha}{k \cos \alpha - \sin \alpha} - v \right); \quad k \leq \operatorname{tg} \alpha + \frac{V}{v \cos \alpha}.$$

1.75. $F = F_0 \frac{v}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2}}$, где $F_0 = 2\pi r \delta \mu P$ — сила, с которой можно снять диск с неподвижного вала.

$$1.76. 2\vec{K} = \vec{U}.$$

$$1.77. \Pi = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

$$1.78. v_1 = v \frac{\sqrt{13}}{4}; \quad v_2 = \frac{v}{4}.$$

1.79. *Решение.* Пусть $\mathbf{v}$ — скорость первой частицы до столкновения, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц после столкновения. Законы сохранения импульса и энергии дают

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Возводя первое соотношение в квадрат и вычитая из него второе, получим $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Если оба вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ не равны нулю, что будет при лобовом ударе, то угол между ними будет равен 90° . При лобовом столкновении $\mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{v}_2$, т.е. частицы просто обмениваются скоростями.

$$1.80. \frac{m_1}{m_2} = 3.$$

$$1.81. E_p = \frac{m_{\text{Be}}^2}{m_{\text{Be}}^2 - m_p^2} E_{\text{пор}} = 1,92 \text{ МэВ. При больших энергиях появятся}$$

нейтроны, летящие назад.

$$1.82. \text{ Альфа-частица уносит } 3,5 \text{ МэВ, нейтрон — } 14,1 \text{ МэВ.}$$

5. Гармонические колебания материальной точки

$$1.83. x = \frac{gT^2}{4\pi^2} \approx 6,2 \text{ см.}$$

$$1.84. t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$1.85. T = \frac{\pi}{4} T_0.$$

$$1.86. T = 2\pi \sqrt{m \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}.$$

1.87. *Решение.* Если сила, действующая на груз со стороны доски, $F' = -F$, то уравнение движения груза $P - F' = m \frac{d^2 x}{dt^2}$, где $P = mg$. Значение ускорения груза находим из закона его колебаний: $x = A \cos \omega t$; тогда получаем

$$-F' = F = -P - mA\omega^2 \cos \omega t = -(1 + 0,32 \cos 4\pi t)H.$$

Рекомендуем начертить график изменения силы F со временем.

$$1.88. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}.$$

1.89. $M > m$. *Решение.* При снятии груза M положение равновесия сместится вверх на величину $x_0 = Mg/k$. Возникнут колебания чашки относительно нового положения равновесия: $x = x_0 \cos \omega t$. Когда чашка начнет подниматься вверх, то вместе с ней будет подниматься и грузик m . В верхнем положении ускорение чашки достигает максимального значения $a_{\max} = \omega^2 x + 0 = kx_0/m = Mg/m$ и направлено вниз. Если $a_{\max} < g$, т.е. $M > m$, то грузик отстанет от чашки и появятся подкакивания.

$$1.90. x > \frac{\mu(M+m)g}{k_1 + k_2}.$$

$$1.91. x > \frac{(M+m)g}{k_1 + k_2}.$$

1.92. $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$, где ω — частота колебаний незакрепленной, а ω_0 — закрепленной пружины.

$$1.93. A = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

$$1.94. \text{ а) } T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt[4]{R^2 - l^2} \text{ (перпендикулярно плоскости рисунка).}$$

$$\text{ б) } T = \frac{2\pi R}{\sqrt{g\sqrt{R^2 - l^2}}} \text{ (в плоскости рисунка).}$$

$$1.95. \omega = \sqrt[4]{\frac{4kg}{m}}.$$

$$1.96. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

$$1.97. t = \frac{2L}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$$1.98. \frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{m}{M+m} \approx -5 \cdot 10^{-4}.$$

$$1.99. A = \frac{f_0}{6k}$$

6. Уравнение моментов. Закон сохранения импульса

$$1.100. x = 0,85 \text{ м.}$$

$$1.101. \omega = \frac{6}{5} \frac{v_0}{l}.$$

$$1.102. v_0^2 = \frac{2gh^2}{h+h_0}; \quad v^2 = \frac{2gh_0^2}{h+h_0}.$$

$$1.103. \omega = \frac{\text{const}}{r^2}; \quad F = \frac{\text{const}}{r^3}; \quad A = \frac{3}{2} m \omega_0^2 R_0^2.$$

1.104. *Решение.* Решение задачи сводится к поиску полной энергии ракеты после выключения двигателей. Оказывается, что $E = \frac{g_0 R_3}{2} - \frac{g_0 R_3}{1,23} < 0$, т.е. ракета не покинет пределы Земли; g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли, R_3 — радиус Земли.

1.105. Уменьшилась бы в $\sqrt{2}$ раз.

$$1.106. 1) r_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}; 2) r_{\text{равн}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; 3) F(r_0) = -\frac{3}{4}b, \quad F(r_{\min}) = 3b > 0;$$

$$4) v_{\text{тк}}^2 = \frac{\sqrt{ab}}{r} \left(\frac{r}{r_{\text{равн}}} - \frac{r_{\text{равн}}}{r} \right) \text{ — имеет смысл при } r > r_{\text{равн}}.$$

1.107. $\Delta v = \frac{R}{4a} \sqrt{\frac{g}{a}} \Delta a = -44 \text{ м/с}$, где a — радиус конечной круговой орбиты, $\Delta a = 200$ — разность между максимальным и минимальным удалением корабля.

$$1.108. v = \frac{v_0}{2} (1 + \sqrt{5}) \approx 1,62 v_0.$$

$$1.109. R_{\max} = \frac{\alpha^2 R}{2 - \alpha^2}; \quad T_2 = \frac{T_1}{(2 - \alpha^2)^{3/2}} \quad (\alpha^2 \leq 2).$$

1.110. *Решение.* Энергия спутника в полярных координатах

$$E = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + (r^2 \dot{\varphi})^2] - \frac{C}{r} \quad (C = \gamma m M_3).$$

Момент импульса относительно центра сил $L = mr(r\dot{\varphi})$. Исключая из уравнения энергии $\dot{\varphi}$ и учитывая, что в точках максимального и минимального удаления спутника от земли $\dot{r} = 0$, уравнение энергии можно записать в следующем виде:

$$r^2 - \frac{\gamma}{|E|} r + \frac{L^2}{2m|E|} = 0.$$

Здесь учтено, что полная энергия спутника E на эллиптических орбитах всегда отрицательна. Два корня этого уравнения дают расстояние до перигея r_1 и апогея r_2 эллиптической орбиты. Согласно теореме Виета:

$$r_1 + r_2 = 2a = \frac{C}{|E|}, \quad r_1 r_2 = \frac{L^2}{2m|E|},$$

где a — главная полуось эллиптической орбиты. Используя уравнение эллипса в полярных координатах, записанное для перигея и апогея $r_{1,2} = r(1 \pm \varepsilon)$, можно

представить все геометрические параметры орбиты через механические константы движения.

В данной задаче полная энергия спутника

$$E = -\frac{C}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -0,3 \frac{C}{R_3},$$

где $v_0^2 = v_{1k}^2 = \frac{C}{mR_3}$ — квадрат первой космической скорости. Большая ось орбиты

$$2a = \frac{C}{|E|} = r_1 + r_2, \text{ откуда } r_1 = 1,25R_3, r_2 = \frac{C}{|E|} - r_1 \approx 2,1R_3.$$

$$1.111. \frac{m_k}{m_c} \leq \frac{2}{5}(\sqrt{6} - 1).$$

$$1.112. 2\sqrt{gr}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < u < 2\sqrt{gr}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

$$2\sqrt{gr}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < u < 2\sqrt{gr}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$1.113. u = \frac{\sqrt{gR}}{2}(2\sqrt{5} \mp 5\sqrt{2}).$$

$$1.114. T_2 = T_1 \left[2 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{2/3} - 1 \right] = 2,78 \text{ года.}$$

$$1.115. \Delta v = v_k - v_B = V_3 \left[\sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \approx 2,71 \text{ км/с.}$$

$$1.116. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1,5} \approx 0,9.$$

7. Движение твердого тела

1.117. $T = \frac{Mg}{1 + Mr^2/I} = \frac{Mg}{1 + Mr^2/(4mR^2)} = 0,99T_0$; $T_{\text{рыв}} = Mg + \frac{Mhr}{\pi m R^2} T \approx \approx 1,42T_0$, где I — момент инерции системы, T_0 — натяжение нити при неподвижном грузе.

$$1.118. a = mgR^2/I.$$

$$1.119. a_{\text{отн}} = \frac{2}{3}(g + a); T = \frac{1}{3}m(g + a).$$

$$1.120. v = \sqrt{\frac{56}{33}gH}.$$

$$1.121. \omega_1 = \frac{M_0\omega_0}{M_0 + \mu t}; \omega_2 = \exp\left(-\frac{2\mu t}{M_0}\right).$$

$$1.122. a = \frac{r \sin \alpha - k(r + R) \cos \alpha}{I_0 + mr^2} mgr.$$

$$1.123. a = F \left(\frac{3}{4}m + M \right)^{-1}.$$

$$1.124. v_0 = 3kR \sqrt{\frac{2g}{R - r}} \approx 8,6 \text{ км/ч.}$$

$$1.125. \frac{\Delta K}{K} = \frac{16}{21}.$$

$$1.126. k = \frac{2 \sin \varphi}{17 \cos \varphi - 10} = 0,21.$$

1.127. *Решение.* Пусть $\mathbf{F}$ — сила трения, действующая на цилиндр в месте соприкосновения его с наклонной плоскостью (рис. 1.2'). Она заставляет цилиндр подниматься по наклонной плоскости. Сначала, пока не установилось чистое качение, $\mathbf{F}$ является силой трения скольжения. После перехода движения в чистое качение $\mathbf{F}$ становится силой трения покоя (сцепления). Однако, независимо от характера движения, оно всегда подчиняется уравнению движения центра масс

$\frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha$ и уравнению моментов (относительно геометрической оси цилиндра) $I \frac{d\omega}{dt} = -Fr$. Исключая F , получим

$$mr \frac{dv}{dt} = -I \frac{d\omega}{dt} - mgr \sin \alpha.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия ($\omega = \omega_0$ при $t = 0$) дает

$$mr v = I(\omega_0 - \omega) m g r t \sin \alpha.$$

Это соотношение справедливо в течение всего времени движения, независимо от того, происходит оно со скольжением или является чистым качением. В наивысшей точке должно быть $v = 0$. Отсюда следует, что в той же точке $\omega = 0$. В противном случае цилиндр продолжал бы вкатываться, и рассматриваемая точка не была бы наивысшей. Поэтому время подъема t найдется, если в предыдущем уравнении положить $v = \omega = 0$. Это дает

$$t = \frac{I \omega_0}{m g r \sin \alpha} = \frac{r \omega_0}{2 g \sin \alpha}.$$

Любопытно, что время поднятия t не зависит от коэффициента трения между цилиндром и наклонной плоскостью. Результат не изменился бы даже в случае переменного коэффициента трения. Решение предполагает, однако, что трение достаточно велико, чтобы цилиндр мог вкатываться на наклонную плоскость. При недостаточном трении будет происходить лишь замедление скорости вращения цилиндра. Нетрудно подсчитать, что время замедления будет определяться прежней формулой.

Напротив, время обратного скатывания вниз, а также наибольшая высота поднятия зависят от коэффициента трения. Такое различие объясняется тем, что скатывание цилиндра все время является чистым качением. Поднятие его вверх сначала происходит со скольжением, а затем переходит в чистое качение.

1.128. Впереди должен быть полый цилиндр;

$$a = \frac{4g \sin \alpha}{k + 7}; \quad N = \frac{mg \sin \alpha}{k + 7}.$$

$$1.129. \omega_{\min} = \frac{v_0}{R}; \quad v = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}.$$

1.130. Скорость первого шара $v_1 = 2v/7$, второго — $v_2 = 5v/7$. Потеря кинетической энергии на трение составляет $20/49$ начального значения кинетической энергии.

$$1.131. \omega_0 > \frac{5v_0 h}{2R^2}.$$

$$1.132. v = \sqrt{3}v_0 - \frac{14}{5\sqrt{3}} \frac{M}{m} v_1.$$

$$1.133. x = \frac{l}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{m}} - 1. \text{ Для возможности описанного процесса необходимо}$$

$M \geq m$. Условие $x \leq l/2$ дает еще $M \leq 4m$.

14*

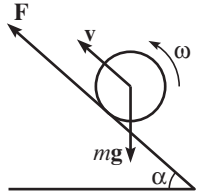


Рис. 1.2'

$$1.134. v = (L - h) \sqrt{\frac{6g(L + h)}{4L^2 - 3h^2}}.$$

$$1.135. F = \frac{P}{1 + 3(l/L)^2}; \text{ при } l = L \quad F = \frac{P}{4}.$$

$$1.136. T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{29a}{18g}}; T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}; \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{29}{18}} \approx 1,27.$$

$$1.137. T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{I}{r^2} + m \right)}.$$

1.138. $\operatorname{tg} \beta = a^3 m^2 g \sin \alpha / (I_{\parallel}^2 \omega^2)$, где $I_{\parallel}$ — момент инерции волчка относительно оси фигуры, m — масса волчка, a — расстояние от точки опоры волчка до его центра масс.

$$1.139. \alpha \approx \frac{malr}{I_{\parallel} \omega} \approx 0,43^\circ \approx 25'.$$

$$1.140. F_{\max} = \frac{2\pi^2 \varphi n \rho^2 m}{Tl} \approx 6500 \text{ Н}.$$

1.141. *Решение.* $F_{\text{дав}} = P + \frac{I_{\parallel} \Omega^2}{r} = P + \frac{1}{2} m \Omega^2 r$, где P — вес бегуна, m — его масса. При $r = 50$ см и рабочей скорости 1 об./с ($\Omega = 2\pi$ рад/с) получаем $\Omega^2 r / 2 \approx mg = P$. Следовательно, $F_{\text{дав}} \approx 2P$. Заметим, что полный момент импульса L не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако, последний момент остается неизменным при вращении катка, а поэтому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

$$1.142. \alpha_{\max} = 2\alpha_0 = 2 \arctg \frac{a}{g} = 22^\circ 40'; \quad \tau = \frac{\pi}{\Omega} \approx 9,9 \text{ с, где } \Omega \approx 0,318 \text{ с}^{-1}.$$

8. Неинерциальные системы координат

$$1.143. \text{ К югу, } y = \frac{4\omega v_0^3 \sin \varphi \cos \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} \approx 71 \text{ м}.$$

1.144. Пуля отклонится к западу на расстояние

$$x_{\text{зап}} = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos \varphi \approx 51 \text{ см}.$$

Результат может показаться неожиданным. При движении вверх кориолисова сила направлена на запад, а при движении вниз — на восток. На первый взгляд кажется, что отклонение к западу должно компенсироваться последующим отклонением к востоку. На самом деле это не так. Когда тело движется вверх, его боковая начальная скорость равна нулю. В наивысшую точку тело приходит, однако, с западной составляющей скорости, которую оно приобретает под действием кориолисовой силы. Поэтому обратное падение тела начинается с начальной скоростью, направленной на запад. Следовательно, скорость все время направлена на запад и перед ударом о землю обращается в нуль.

1.145. Ствол ружья надо отклонить к востоку на угол

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos \varphi \approx 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 51''.$$

1.146. *Решение.* В системе координат, связанной с Землей, на движущийся внутри ствола снаряд (а следовательно, и на систему пушка–снаряд) будет действовать сила Кориолиса, направленная на запад и равная $F = 2mv\omega$, где v — мгновенное

значение скорости снаряда, $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Уравнение движения пушки со снарядом имеет вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = 2m\omega_0 v r,$$

где I — момент инерции пушки (моментом инерции снаряда можно пренебречь ввиду условия $M \gg m$), r — расстояние снаряда от оси вращения в данный момент времени, ω — мгновенное значение угловой скорости вращения ствола пушки. Полагая $v = at$, получим

$$\frac{1}{3} M l^2 \int_0^{\omega} d\omega = m\omega_0 a^2 \int_0^{t_0} t^3 dt,$$

где $t_0 = \sqrt{2l/a}$ — время движения снаряда внутри ствола. Интегрируя это уравнение, находим ω : $\omega = 3m\omega_0/M = 2,2 \cdot 10^{-6}$ рад/с.

1.147. $\alpha = 4\pi R/(vT) = 0,0209$ рад $= 1,2^\circ$.

1.148. $v_0 \geq 0,29$ м/с.

1.149. Решение (в системе координат, связанной с Землей). С учетом действия центробежной силы инерции и кориолисовой силы условия отрыва самолета от Земли можно записать в следующем виде:

1) при разбеге с запада на восток

$$mg - 2m\omega_0 v_1 - m\omega_0^2 R = kv_1^2;$$

2) при разбеге с востока на запад

$$mg + 2m\omega_0 v_2 - m\omega_0^2 R = kv_2^2;$$

3) при разбеге вдоль меридиана

$$mg - m\omega_0^2 R = kv_0^2,$$

где v_1 и v_2 — окончательные скорости разбега, R — радиус Земли. Решение этой системы даст

$$v_2 - v_1 = \frac{2\omega_0 v_0^2}{g - \omega_0^2 R}.$$

Учитывая, что $g \gg \omega_0^2 R$, находим: $\Delta v \approx 2\omega_0 v_0^2/g$, где ω_0 — угловая скорость вращения земли вокруг своей оси.

1.150. $M = 2m$, если человек останется на карусели; $M = 4m$, если он прыгнет с нее.

$$\mathbf{1.151.} \quad V = \frac{4m\Omega_3 l}{M} \sin \varphi \sin \alpha = \frac{3m\Omega_3 l}{M} = 0,3 \text{ мм/с.}$$

$$\mathbf{1.152.} \quad k = \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega r_0}{v_0} - \frac{v_0}{\Omega r_0} \right], \text{ т.е. при } \Omega r_0 > v_0.$$

1.153. $v_{\max} \approx 0,003$ м/с; траектория близка к окружности.

9. Упругие деформации и элементы гидродинамики

1.154. $\Delta l = \rho g l^2 / 2E$, где ρ — плотность вещества стержня, l — его длина, E — модуль Юнга; объем увеличивается на $\Delta V = \frac{1-2\mu}{2SE} V_0^2 \rho g$, где V_0 — первоначальный объем, μ — коэффициент Пуассона, S — поперечное сечение.

$$\mathbf{1.155.} \quad \alpha = 45^\circ; \quad \tau = \frac{F}{2S}.$$

$$1.156. U = \frac{P^2 h}{6ES}; \text{ упругая энергия увеличится в 7 раз.}$$

$$1.157. 1) \frac{U_{\text{ст}}}{U_{\text{пл}}} = \frac{E_{\text{ст}}}{E_{\text{пл}}} = 2 \cdot 10^3; \quad 2) \frac{U_{\text{ст}}}{U_{\text{пл}}} = \frac{E_{\text{пл}}}{E_{\text{ст}}} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

$$1.158. T = \frac{2\pi x}{L} E, \text{ где } x \text{ — расстояние от нейтрального сечения.}$$

$$1.159. \Delta l = \frac{4Fl(1 - \mu - 2\mu^2)}{\pi D^2 E(1 - \mu)}.$$

$$1.160. P = E \frac{\rho_b - \rho}{2\rho_b(1 - 2\mu)} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ атм.}$$

$$1.161. \alpha = \frac{\alpha_m + 2\alpha_{\text{ст}}}{3} = 1,37 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}.$$

$$1.162. F_{\text{max}} = mg + v_0 \sqrt{\frac{mES}{l}} \approx 2,1 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

$$1.163. t = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}), \quad T = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

1.164. Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки AB , скорость истечения постоянна и равна $v = \sqrt{2gh}$. После этого скорость истечения начнет уменьшаться.

$$1.165. t = \frac{S}{\sigma} \frac{h - h_0}{\sqrt{2gh_0}}.$$

1.166. *Решение.* Перейдем в систему отсчета, в которой жидкость покоится. В ней добавятся две силы инерции: центробежная и кориолисова. Кориолисова сила не совершает работы. Она лишь искривляет линии тока, но не сказывается на справедливости и форме общего уравнения Бернулли. Центробежная сила добавляет новый член к потенциальной энергии. Полная потенциальная энергия единицы массы жидкости будет $u = gz - \omega^2 r^2/2$, так что уравнение Бернулли запишется в виде

$$\frac{v^2}{2} + gz - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{const},$$

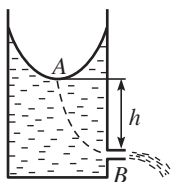


Рис. 1.3'

где v — относительная скорость жидкости (т.е. скорость относительно вращающейся системы отсчета). Постоянная Бернулли B одна и та же для всех линий тока, поскольку все они начинаются вблизи поверхности жидкости, где скорость v пренебрежимо мала. Применим полученное уравнение к линии тока AB , начинающейся на поверхности жидкости в точке A

(рис.1.3'). Если начало координат поместить в точке A , то $z_A = r_A = v_A = 0$, $P_A = P_B = P_0$, $v_B = v$, $z_B = -h$, $r_B = R$, и мы получим, что $v = \sqrt{2(g h + \omega^2 R^2)}$ означает высоту наиболее низкой (центральной) точки A уровня жидкости относительно отверстия. Переход к неподвижной системе отсчета не представляет затруднений.

$$1.167. f = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln(r_2/r_1)} \approx 0,27 \text{ дин/см}; \quad v(r) = v_0 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

$$1.168. \tau = \frac{8\eta L}{\rho g R^2}, \text{ где } g \text{ — ускорение свободного падения.}$$

$$1.169. v_{\text{max}} = \frac{\rho g h \delta^2}{8\eta d} \approx 2,3 \text{ см/с}; \quad \dot{M} = \frac{2}{3} \rho l v_{\text{max}} \delta = 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ г/см.}$$

10. Элементы релятивистской механики

$$1.170. v = \frac{2l_0\tau}{\tau^2 + l_0^2/c^2}.$$

$$1.171. \Delta t = \frac{2L}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right) \approx \frac{L}{c} \frac{v}{c} = 0,0143 \text{ лет} = 5,24 \text{ сут.}$$

$$1.172. \text{ По собственным часам корабля пройдет промежуток времени } \tau = \frac{Lv}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = 1,5 \text{ мес.}$$

1.173. Ване будет 20 лет, а Пете — 25 лет.

$$1.174. V_0 = c\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} = \frac{4}{5}c, \text{ где } \tau_0 = 15 \text{ лет, } \tau = 25 \text{ лет.}$$

1.175. Помимо обычного возможно графическое решение этой задачи. Из рис. 1.4': $x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1 v}{2c} \Rightarrow x_1 = \frac{2x_2}{1 + \beta}$; $\tau_3 = \frac{x_1 - x_2}{c} = \frac{x_2}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \tau_1 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 0,5 \text{ с.}$

1.176. *Решение.* Фотоаппарат фиксирует лучи, которые приходят в него одновременно. Поэтому, вследствие конечности скорости света, точки предмета, лежащие дальше от фотоаппарата, чтобы дать вклад в изображение, должны испустить лучи раньше, чем более близкие точки.

Рассмотрим, например, светящийся предмет кубической формы со стороной l , пролетающий на большом расстоянии от точки фотографирования со скоростью v перпендикулярно к лучу света, направленному на фотоаппарат (рис. 1.5' а). Вследствие движения тыльная грань $ABEF$, невидимая при неподвижном кубе,

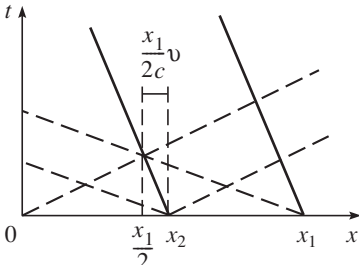


Рис. 1.4'

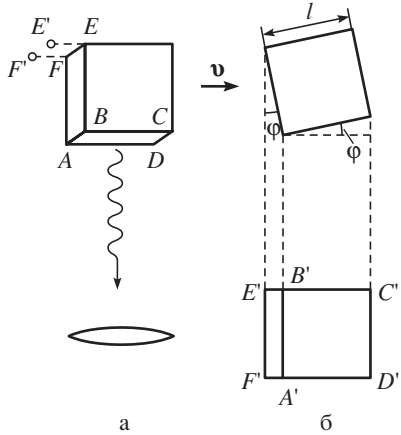


Рис. 1.5'

становится видимой, так как из точек E и F свет излучился на время l/c раньше, чем с грани $ABCD$, когда точки E и F находились в положении E' и F' . На фотографии (рис. 1.5' б) грань $ABEF$ выйдет в виде прямоугольника $A'B'E'F'$ со стороной $A'F' = \frac{v}{c}l$.

С другой стороны, грань $ABCD$ вследствие сокращения Лоренца будет сжатой в направлении движения в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз так, что ее изображение $A'B'C'D'$ на фотографии получится в виде прямоугольника со стороной $A'D' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Нетрудно видеть, что на фотографии общая форма движущегося куба не искажается, так как он кажется повернутым на угол $\arcsin v/c$ при сохранении своих пропорций (рис. 1.5' б). Аналогично, для движущегося шара вследствие совместного действия запаздывания света и сокращения Лоренца видимая форма шара не искажается: на фотографии он получается в форме круга. Чтобы наблюдать при помощи фотоаппарата сокращение Лоренца в чистом виде, нужно воспользоваться внешним источником освещения, например, лампой-вспышкой, который исключает кажущийся поворот движущихся предметов.

1.177. Решение. Кинетическая энергия равна работе поля, так что

$$k_r \equiv mc^2(\gamma - 1) = eV, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда $\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2}$, а следовательно, $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$. Окончательно:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \sqrt{\frac{1 + eV/(2mc^2)}{[1 + eV/(mc^2)]^2}}.$$

Если $eV \ll mc^2$, то

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{eV}{mc^2}\right);$$

если $eV \gg mc^2$, то

$$v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \sim c.$$

В последних двух случаях используется разложение подкоренного выражения основной формулы в ряд по малому параметру.

1.178. $pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)}$.

1.179. Стрелка совершит два оборота.

1.180. Решение. Условие, при котором рассматриваемая реакция происходит с минимальной затратой энергии, легко найти, рассмотрев процесс в системе центра масс. Затраченная энергия будет минимальна, если в этой системе все четыре образовавшихся частицы покоятся. В лабораторной системе они будут двигаться с одинаковыми скоростями, как если бы образовалась одна частица с массой покоя $M = 4m_p$ или энергией покоя $4m_p c^2$. Эту энергию удобно обозначить $2E$. Таким образом, $2E = 4m_p c^2 = 4E_0$, где E_0 — энергия покоя протона. Полная энергия движущегося протона (с импульсом p) до реакции будет равна $\sqrt{E_0^2 + (pc)^2}$. Поскольку при столкновении импульс сохраняется, полная энергия образовавшихся частиц представится выражением $\sqrt{(2E)^2 + (pc)^2}$. Закон сохранения энергии даст

$$\sqrt{E_0^2 + (pc)^2} + E_0 = \sqrt{(2E)^2 + (pc)^2};$$

отсюда

$$(pc)^2 = \frac{4(E^4 - E^2 E_0^2)}{E_0^2}.$$

Чтобы найти исходную кинетическую энергию протона, надо из его полной энергии вычесть энергию покоя. Это дает

$$K = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} - E_0 = 2 \left(\frac{E^2}{E_0} - E_0 \right).$$

В рассматриваемом случае $E = 2E_0$, так что $K = 6E_0 = 5,62$ ГэВ.

1.181.

$$E' = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = 2 \frac{E^2}{E_0} - E_0 \approx 213 \text{ ГэВ},$$

где $E_0 = 0,937$ ГэВ — энергия покоя протона, β' — относительная скорость движущейся частицы, которую следует вычислить по теореме о сложении скоростей:

$$\beta' = \beta_{\text{отн}} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \quad \tau_0 = \frac{\tau_{\text{лаб}}}{\gamma} = \frac{l}{\gamma\beta c} \approx 2,2 \cdot 10^{-16} \text{ с},$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1,8$; $\beta = \frac{v}{c} \approx 0,84$.

Г л а в а II

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

1. Электрическое поле в вакууме

$$2.1. R = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{3e}{\sqrt{\varepsilon_0 \gamma}} \right)^{1/3} \approx 0,076 \text{ мм.}$$

$$2.2. d = \sqrt{\frac{qQ(m+M)}{4\pi\varepsilon_0 E(Qm+qM)}}.$$

$$2.3. E \simeq 3qa^2/4\pi\varepsilon_0 r^4.$$

2.4. $F_{12} = -F_{21} = 3\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2/(2\pi\varepsilon_0 d^4)$. Параллельные диполи притягиваются, антипараллельные — отталкиваются.

$$2.5. \mathbf{E} = (3\varepsilon_0)^{-1} \rho \mathbf{r}.$$

2.6. *Решение.* Представим полость как область пересечения двух однородно заряженных шаров с объемной плотностью заряда, соответственно, ρ и $-\rho$. Используя результат предыдущей задачи, а также векторное равенство $\mathbf{r}_1 - \mathbf{l} = \mathbf{r}_2$, приходим к следующему результату: поле в полости однородно; $\mathbf{E} = (3\varepsilon_0)^{-1} \rho \mathbf{l}$.

$$2.7. 8,4 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$2.8. 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$2.9. \text{Притяжение; } F = q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2.$$

2.10. *Решение.* Поверхность шара, а следовательно, и полость внутри него, эквипотенциальны, поэтому наиболее удобно определить потенциал центра шара. Поскольку полный заряд, индуцированный на его поверхности, остается нулевым, а любая точка поверхности находится на одном и том же расстоянии от центра, вклад в потенциал центральной точки зарядов, распределенных на поверхности, остается нулевым. Таким образом, искомый потенциал определяется исключительно внешним зарядом и равен $q/4\pi\varepsilon_0 r$.

$$2.11. \delta q = -q \frac{r}{d}.$$

2.12. *Решение.* Введем ось Ox , как показано на рис. 2.1', и воспользуемся теоремой Гаусса в форме $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. В нашей одномерной задаче $\mathbf{E} \parallel Ox$, следовательно, $\text{div} \mathbf{E} = \partial E/\partial x$. Таким образом, $\partial E/\partial x = \rho/\varepsilon_0$, откуда $E = \text{const} + \rho x/\varepsilon_0$. Поскольку $E(d) = 0$, $\text{const} = -\rho d/\varepsilon_0$, т.е. $E = \rho(x-d)/\varepsilon_0$. Далее,

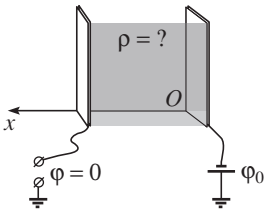


Рис. 2.1'

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \int_0^x E dx;$$

$$\varphi(d) = \varphi_0 + \frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0} = 0; \quad \rho = -\frac{2\varepsilon_0 \varphi_0}{d^2}.$$

2.13. *Решение.* 1) Предположим, что мы можем реализовать нужную конфигурацию полей вне шара, заменив последний точечным зарядом Q , расположенным на линии «заряд q — центр шара» (учитывается осевая симметрия задачи) и сдвинутым на некоторое расстояние a от центра (рис. 2.2'). Если такая модель адекватна, то $\varphi = 0$ на поверхности сферы, в частности, в ее точках, в самой близкой и в самой удаленной

относительно заряда q : $\varphi(d - R) = \varphi(d + R) = 0$, или, подробнее,

$$\frac{q}{d - R} + \frac{Q}{R - a} = 0; \quad \frac{q}{d + R} + \frac{Q}{R + a} = 0,$$

откуда следует $a = R^2/d$, $Q = -qR/d$.

Докажем, что при такой замене потенциал на всей сфере обратится в нуль. Воспользуемся осевой симметрией (рис. 2.3') и получим уравнение геометрического места точек в произвольном сечении, для которых $\varphi = 0$:

$$\frac{|Q|}{[(x - a)^2 + y^2]^{1/2}} = \frac{q}{[(d - x)^2 + y^2]^{1/2}}.$$

Подставим сюда уже вычисленные Q и a :

$$\frac{R^2/d^2}{(x - R^2/d)^2 + y^2} = \frac{1}{(d - x)^2 + y^2},$$

откуда в два действия следует $x^2 + y^2 = R^2$. Наше утверждение доказано, так что и окончательный ответ для силы получить нетрудно:

$$F = \frac{q|Q|}{4\pi\epsilon_0(d - a)^2} = \frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0(d^2 - R^2)^2}.$$

2) В случае изолированного шара мы можем воспользоваться тем же построением, но теперь следует обеспечить нейтральность шара в целом, для чего внести внутрь шара дополнительный заряд $-Q = qR/d$. Поместить его следует в центре шара, чтобы не нарушить эквипотенциальность сферического проводника. Соответственно, появится добавка к силе взаимодействия:

$$\Delta F = -\frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 d^3}.$$

2.14. $q = -2(\sqrt{2} - 1)Q$.

2.15. $\Delta\varphi_{\max} = E_{\max} d \ln(b/d) \approx 186$ кВ.

2. Электрическое поле в веществе. Емкость

2.16. $q = \frac{q_1 d_2 - q_2 d_1}{d_1 + d_2} = 9,5 \cdot 10^{-10}$ Кл.

2.17. Уменьшится в $(1 + \epsilon)/2$ раз.

2.18. $N = CU^2\eta/2\tau \approx 225$ кВт.

2.19. $C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r}{1 + \frac{r}{R}(\epsilon - 1)}.$

2.20. $W = 3Z^2 e^2 / 20\pi\epsilon_0 R \approx 1,5 \cdot 10^{-10}$ Дж.

2.21. *Решение.* Ответ зависит от режима процесса заполнения. Емкость конденсатора увеличится в ϵ раз. Если конденсатор был предварительно заряжен, а при заполнении от источника отключен, то мы должны считать инвариантом заряды на обкладках $\pm Q$. Тогда энергия $Q^2/2C$ уменьшится в ϵ раз. Напротив, если при заполнении конденсатор остается подключенным к источнику напряжения, то инвариантной останется разность потенциалов между обкладками, соответственно, энергия $CU^2/2$ увеличится в ϵ раз. Тот же результат можно получить, сравнивая

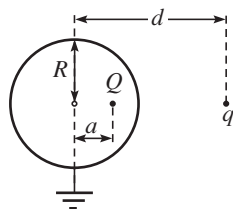


Рис. 2.2'

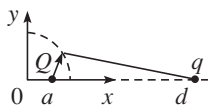


Рис. 2.3'

плотность энергии в пустом конденсаторе и заполненном, но в первом случае $D = \text{inv}$, $E \propto \varepsilon^{-1}$, а во втором — $E = \text{inv}$, $D \propto \varepsilon$.

$$2.22. E_A = P/2\varepsilon_0; E_B/E_A \simeq r^2/l^2.$$

2.23. *Решение.* Энергия заряженной сферы $W = Q\varphi/2 = Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$. Мысленно дадим радиусу сферы малое приращение: $R \rightarrow R + \delta R$. Приращение энергии свяжем с работой искомого давления:

$$W + \delta A \simeq W - P4\pi R^2 \delta R \equiv \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(R + \delta R)} \simeq W - \frac{Q^2 \delta R}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Отсюда получаем $P = Q^2/[2(4\pi)^2\varepsilon_0 R^4]$.

2.24. *Решение.* Подобно предыдущей, задача решается методом виртуальных перемещений. Дадим углу приращение $\delta\theta$, при этом $\delta A = \mathcal{M}\delta\theta$.

При подключенном источнике ($V = \text{const}$) последний совершает при перемещении работу

$$dW = Vdq = V^2 dC = \mathcal{M}d\theta + \frac{dCV^2}{2} \Rightarrow \mathcal{M}d\theta = \frac{dCV^2}{2}.$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{d\theta} = \frac{1}{2}V^2 \frac{d}{d\theta} \left[\varepsilon R^2 \frac{\pi - \theta}{2} + \frac{R^2 \theta}{3} \right] \frac{\varepsilon_0}{d} = -\frac{V^2}{4d} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) R^2.$$

При отключенном источнике ($Q = \text{const}$) энергия конденсатора сохраняется:

$$\mathcal{M}d\theta = -d\frac{Q^2}{2C}, \text{ где } Q = CV = \text{const. Отсюда следует}$$

$$\mathcal{M} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{d\theta} = -\frac{V^2}{4d} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) R^2.$$

2.25. *Решение.* Воспользуемся решением задачи 2.6, которое не накладывало никаких условий ни на соотношение радиусов шара и полости, ни на величину сдвига l . Поэтому однородное поле внутри сферы можно получить, представив ее как совокупность двух сфер с плотностями заряда ρ и $-\rho$, чуть-чуть сдвинутых (на рисунке 2.4' а утрировано). Шар в целом будет нейтрален, и лишь в пограничных областях образуется разбаланс зарядов. Тогда в «полости» $\mathbf{E} = (3\varepsilon_0)^{-1}\rho l$. Поверхностную плотность заряда можно определить следующим образом: $\sigma = \rho l_n \cos \theta =$

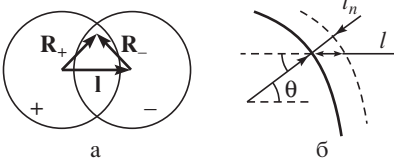


Рис. 2.4'

$= 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$ (рис. 2.4' б). Хотя шар нейтрален как целое ($\int_0^\pi \sigma d\theta = 0$), его дипольный момент не равен нулю, причем во внешнем пространстве шар действует как точечный диполь. В самом деле, $\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \sum_i q_i^+ \mathbf{r}_i^+ - \sum_i q_i^- \mathbf{r}_i^- = q l = -\frac{4\pi}{3} R^3 \rho l = -4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0$, ибо распределения зарядов обоих знаков сферически симметричны. Теперь мы можем определить поле вне шара, приняв его центр за начало координат:

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} = \mathbf{E}_0 \left(\frac{R}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{(\mathbf{E}_0 \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2}.$$

2.26. *Решение.* Условие $nr^3 \ll 1$ позволяет считать, что шарики поляризуются исключительно во внешнем поле, а влияние на поляризацию искажения поля,

вносимого соседними шариками, пренебрежимо мало. Внешнее поле E создает в проводящем теле поле $\mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}$, значит, каждый шарик, согласно решению предыдущей задачи, приобретает во внешнем поле дипольный момент $4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}$, а дипольный момент единицы объема оказывается равным $4\pi\epsilon_0 n R^3 \mathbf{E}$, так что поляризуемость $\beta = 4\pi n R^3$, и окончательно: $\epsilon = 1 + 4\pi n R^3$.

$$2.27. C = \frac{S\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{d \ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}.$$

2.28. $Q = 2\pi\epsilon_0 [R_1\varphi_1^2 + R_2\varphi_2^2 + R_3\varphi_3^2 - (R_1 + R_2 + R_3)\varphi^2] \approx 4 \cdot 10^{-7}$ Дж, где φ — установившийся потенциал системы после соединения всех шаров.

$$2.29. F \simeq \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 l^4} = \frac{(\epsilon - 1)^2 U^2 r^6}{12\pi\epsilon_0 d^2 l^4} \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ Н}.$$

$$2.30. E(x) = -P_0\epsilon_0^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right), \quad U = \int_{-d/2}^{d/2} E dx = \frac{4P_0 d}{3\epsilon_0}, \text{ вне пластинки поле}$$

равно нулю.

3. Постоянный ток. Электрические цепи

$$2.31. R_{AB} = \frac{7}{5}r.$$

$$2.32. U_R = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} R.$$

$$2.33. E(R) = 4\pi^2 n^2 \frac{m}{e} r, \quad \Delta\varphi = \frac{m\omega^2 D^2}{8e} \approx 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ В}.$$

2.34. В проводнике при конечной проводимости имеет место соотношение $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$. Поскольку на границе $[\mathbf{E}]_\tau = 0$, поле будет отлично от нуля и в окружающем проводник пространстве.

2.35. *Решение.* Проводник с постоянным током обязательно является элементом замкнутой электрической цепи, вдоль которой при конечной проводимости имеет место перепад потенциала φ . Поскольку разные участки цепи пребывают под разными значениями потенциала, между ними в пространстве возникает электрическое поле (рис. 2.5'). Окружая любой из проводников на рис. 2.5' цилиндрической поверхностью, легко видеть, что поток электрического поля через эту поверхность не равен нулю, а значит, по теореме Гаусса, не равен нулю и заряд в произвольном месте электрической цепи.

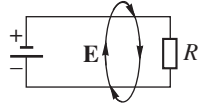


Рис. 2.5'

Примечание: Квазинейтральность токонесущего проводника означает, что поле следует искать из закона Ома, а возмущение заряда дает к этому полю лишь малые поправки.

$$2.36. I = \frac{\mathcal{E}_0(1 + R_3/R_2) - \mathcal{E}_1}{R_0(1 + R_3/R_2) + R_3}.$$

$$2.37. \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 + (R_1/R_2)\mathcal{E}_2}{1 + R_1/R_2}.$$

$$2.38. \text{ а) } R = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad \text{ б) } I_R = 0, \text{ если } \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2 = R_1/R_2.$$

$$2.39. \text{ а) } \alpha_{\text{ef}} = \frac{R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}; \quad \text{ б) } \alpha_{\text{ef}} = \frac{R_{02}\alpha_1 + R_{01}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

2.40. *Решение.* Идеальная (или просто очень высокая) проводимость электродов в динамической задаче есть условие их эквипотенциальности. Постоянное удельное сопротивление среды позволяет сформулировать динамическую задачу в форме,

математически эквивалентной электростатике. Поставим целью в обоих случаях вычислить одну и ту же величину: напряжение между электродами.

Электростатика:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \varphi_{1,2} = \text{const}_{1,2}, \quad V = \frac{Q}{C} = \frac{\int \sigma dS}{C} = \frac{\varepsilon_0 \int \mathbf{E}_{\text{гп}} d\mathbf{S}}{C}.$$

Постоянный ток:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 = \frac{\operatorname{div} \mathbf{E}}{\rho}, \quad \varphi_{1,2} = \text{const}_{1,2}, \quad V = IR = R \int \mathbf{j}_{\text{гп}} d\mathbf{S} = \frac{R}{\rho} \int \mathbf{E}_{\text{гп}} d\mathbf{S}.$$

Интегралы берутся по поверхности любого (но одного и того же) электрода. В силу теоремы однозначности, решение при заданных потенциалах полностью определено. Приравняв выражения для V , получим $R = \rho \varepsilon_0 / C$.

$$2.41. \frac{dQ}{dt} = \frac{\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} \sum q_i \varphi_i.$$

2.42. *Решение.* Условие постоянства тока:

$$I/S = j = \lambda(x) E(x) = \text{const}.$$

Отсюда $E(x) = I/S\lambda(x)$, тем самым $D(x) = \varepsilon_0(I/S)[\varepsilon(x)/\lambda(x)]$. Соответственно:

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_0 \frac{I}{S} \frac{\varepsilon(x)}{\lambda(x)}.$$

Искомая величина получается интегрированием плотности заряда по объему:

$$q = S \int_1^2 \rho dx = \varepsilon_0 I \left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} \right).$$

2.43. $\rho = \varepsilon_0 l j \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{[\lambda_1 l + (\lambda_2 - \lambda_1)x]^2}$, где x — текущая координата вдоль участка длины l .

$$2.44. \sigma = \varepsilon_0 V \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_1}.$$

2.45. *Решение.* Для получения сопротивления заземления в компактной форме полезно пренебречь также асимметрией, связанной с подводящими проводами. Таким образом, для каждого (почти уединенного) шара задача о течении заряда оказывается с точностью до малых поправок сферически симметричной. Отсюда сразу следует:

$$I = \text{const} = 4\pi r^2 j(r) \implies E(r) = j/\lambda = I/4\pi r^2 \lambda.$$

При вычислении падения напряжения следует учесть, что интеграл $\int E dr$ быстро сходится, поэтому зависимостью $\lambda(r)$ вдали от электродов можно пренебречь, и, кроме того, падения напряжения на двух электродах войдут аддитивно:

$$U \equiv IR \simeq \int_{r_1}^{\infty} \frac{I dr}{4\pi \lambda_1 r^2} + \int_{r_2}^{\infty} \frac{I dr}{4\pi \lambda_2 r^2},$$

откуда и следует

$$R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2} \right).$$

2.46.

$$Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\mathcal{E}r_2}{r_2/r_1 + \lambda_1/\lambda_2}; \quad Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2\mathcal{E}r_1}{r_1/r_2 + \lambda_2/\lambda_1}.$$

2.47. *Решение.* Поскольку $\lambda_1 \gg \lambda_2$, цилиндрические проводники можно считать эквипотенциальными по всей длине. Ввиду того, что $r_0 \ll b$, будем считать, что вблизи проводника $E = A/r$, тогда разность потенциалов между ними можно оценить как

$$V \simeq 2 \int_{r_0}^b (A/r) dr = 2A \ln(b/r_0)$$

(коэффициент 2 учитывает вклад двух особенностей вида $1/r$). Ток вблизи каждого из стержней можно представить в виде $I = 2\pi r_0 a \lambda E(r_0) = 2\pi r_0 a \lambda A/r_0$. Отсюда следует:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\pi \lambda a} \ln(b/r_0).$$

2.48. Мощность $N = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)bv\mathcal{E}^2/h$ распределена поровну между увеличением электрической энергии конденсатора и кинетической энергии диэлектрической пластины.

4. Магнитное поле тока

2.49. Увеличится в 4 раза.

2.50. Вектор $\mathbf{B}$ направлен под углом $\pi/4$ к плоскости обручей, при этом направления токов в кольцевых проводниках определяют, в каком квадранте он расположен; $B = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} \frac{I}{R}$.

2.51. $I \simeq 9,8$ А.

2.52. По окружности, плоскость которой нормальна к силовым линиям. При этом $v = \text{const}$, $\omega = \omega_{\text{вс}} = eB/m$.

2.53. К востоку примерно на 3 мм.

2.54. *Решение.* Движение заряженной частицы в магнитном поле определяется силой Лоренца. В направлении оси $Ox \parallel \mathbf{H}$ (рис. 2.6' а) на частицу не действуют ни сила Лоренца, ни сила $e\mathbf{E}$, так что в этом направлении движение будет равномерным: $v_x = \text{const}$. Формула $\mathbf{F} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ допускает интересную трактовку. Перейдем в систему отсчета, связанную с частицей. В этой системе частица имеет нулевую скорость, а значит, не работает и сила Лоренца. Но сама сила остается, и ее невозможно трактовать иначе, как перенормировку электрического поля в движущейся системе отсчета:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Теперь попробуем найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{E}' = 0$. Умножаем $\mathbf{E}'$ векторно на $\mathbf{B}$:

$$[\mathbf{E}, \mathbf{B}] = -[[\mathbf{v}\mathbf{B}]\mathbf{B}] = vB^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v}\mathbf{B}).$$

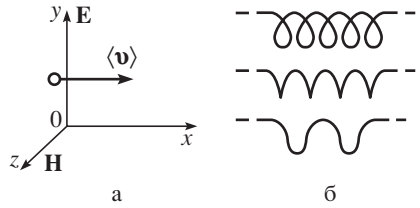


Рис. 2.6'

Поскольку мы уже отделили движение параллельно магнитному полю, второй член справа можно без ограничения общности приравнять нулю. Таким образом, в системе отсчета, движущейся со скоростью

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2},$$

частица вообще не будет чувствовать магнитное поле, и ей останется лишь совершать циклотронное вращение с частотой eB/m . Однако это вращение зависит от заряда и массы частицы. Полная траектория есть результат сложения усредненного движения с $\mathbf{v} \parallel Oz \perp \mathbf{E}, \mathbf{H}$ и циклотронного вращения в плоскости xy ; вид ее в зависимости от начальных условий представлен на рис. 2.6' б. Конечно, все это верно только при условии $\langle v \rangle = E/\mu_0 H \ll c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}$, откуда и следует ограничение $\varepsilon_0 E^2 \ll \mu_0 H^2$.

2.55. Внутри трубы $H = 0$, а вне ее $H = I/2\pi R$, где R — расстояние от точки наблюдения до оси цилиндра.

2.56. Внутри соленоида силовые линии — прямые, параллельные оси соленоида, при этом $H = NI$. Вне соленоида силовые линии — концентрические окружности, и $H \simeq I/2\pi R$, где R — расстояние от точки наблюдения до оси цилиндра.

$$\mathbf{2.57.} \quad B = \frac{\mu_0 I}{8\pi R} (\pi + 4).$$

$$\mathbf{2.58.} \quad H = 2I\sqrt{a^2 + b^2}/\pi ab.$$

2.59. Сверхпроводящий ток антипараллелен току I , $i = Ih/\pi r^2$, где r — расстояние между проводом и точкой наблюдения.

2.60. Вне проводника $H = I/2\pi r$, а внутри его $H = Ir/2\pi R^2$.

2.61. Решение. Введем вектор $\overline{AB} = \mathbf{d}$ (рис. 2.7' а) в сечении проводников и воспользуемся принципом суперпозиции полей. Поскольку плотности тока в проводниках равны и противоположно направлены, дополним мысленно каждый из них до цилиндра, так что нулевой ток в полости получается как результат сложения встречных токов. Произвольная точка полости будет характеризоваться радиус-векторами $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$; $\mathbf{d} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$. Внутри цилиндрического проводника, по которому течет однородный ток j (рис. 2.7' б) — поле на радиусе R находится из теоремы о циркуляции (см. зад. 2.60): $H = \frac{1}{2} R j$. Если же

мы хотим определить вектор $\mathbf{H}$, то, как можно понять из рис. 2.7' б, это соотношение следует переписать в виде векторного произведения: $\mathbf{H} = [\mathbf{j}, \mathbf{R}]/2$. Вычислим поле в полости, имея в виду, что $\mathbf{j}_B = -\mathbf{j}_A$:

$$\mathbf{H}_{\text{п}} = \frac{1}{2} ([\mathbf{j}_A, \mathbf{R}_A] + [\mathbf{j}_B, \mathbf{R}_B]) = \frac{1}{2} [\mathbf{j}_A, \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B] = \frac{1}{2} [\mathbf{j}_A, \mathbf{d}].$$

Таким образом, поле в полости будет однородным и направлено в нашем случае снизу вверх.

$$\mathbf{2.62.} \quad \frac{dF}{dl} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi x} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м.}$$

$$\mathbf{2.63.} \quad B_0/B_c = N/\pi \simeq 3 \cdot 10^3.$$

$$\mathbf{2.64.} \quad m = \frac{1}{8} Q R^2 \omega.$$

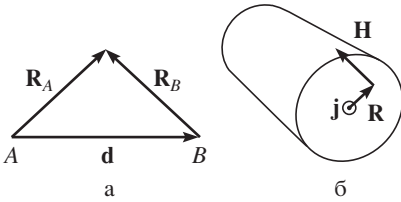


Рис. 2.7'

$$2.65. \mathbf{H} = \frac{QR^2}{5} \left[\frac{3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right].$$

2.66. *Решение.* Добавочная сила, действующая между диполями, может быть представлена в форме $F = \Delta(\mathbf{m}/\mathbf{B})$, где поле $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, где $\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{mR})\mathbf{R} - R^2\mathbf{m}}{4\pi R^5}$ — поле диполя. В нашем случае вычисления существенно упрощаются, поскольку максимальные поправки к периоду обращения с очевидностью соответствуют параллельной и антипараллельной ориентации диполей. При этом первый член в числителе обращается в нуль, так что для энергии и силы взаимодействия получаются следующие выражения:

$$W = \mp \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 m}{R^3} \Rightarrow \delta F_r = \mp \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 m}{R^4}.$$

Уравнение баланса сил во вращающейся системе отсчета:

$$M\omega^2 R = \gamma \frac{M_0 M}{R^2} \mp \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 m}{R^4},$$

где γ — гравитационная постоянная. Мы пренебрегли ради простоты ответа различием между массой планеты и приведенной массой, полагая, что наша поправка будет относительно больше, чем M/M_0 . Далее, представляя частоту обращения в виде $\omega^2 \simeq \omega_0^2 \mp 2\omega_0 \delta\omega$, где $\omega_0^2 = \gamma M_0/R^3$, получаем:

$$\frac{2\delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\delta T}{T_0} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 m}{\gamma M_0 M R^2}.$$

Искомая величина разброса периода обращения $\Delta T = 2\delta T$, так что окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$\Delta T = \frac{3\mu_0}{2} \frac{m_0 m}{M(\gamma M_0)^{3/2} R^{1/2}}.$$

5. Электромагнитная индукция

$$2.67. \frac{dL}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

$$2.68. L = \pi\mu_0\mu \frac{(NR)^2}{l}.$$

$$2.69. L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-r}{r} \simeq 9 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

2.70. *Решение.* Поскольку магнитный поток не рассеивается (это означает, помимо надлежащей геометрии сердечника, $\mu \gg 1$), то через каждый виток он один и тот же: $\Phi = \text{inv}$. Пусть, для определенности, ток течет через первую обмотку:

$$\Phi = \Phi_1/N_1 = \Phi_{12}/N_2 \Rightarrow L_1 I/N_1 = L_{12} I/N_2.$$

Аналогичным образом $L_{21}/N_1 = L_2/N_2$. По теореме взаимности $L_{21} = L_{12}$. Исключая число витков N_1, N_2 , получаем

$$L_{12} = (L_1 L_2)^{1/2} = 0,59 \text{ Гн}.$$

Простая формула $(L_1 L_2)^{1/2}$ представляет максимально возможный коэффициент взаимной индукции при заданной индуктивности двух катушек. Реально он всегда меньше, потому что невозможно полностью исключить рассеяние магнитного потока.

2.71. *Решение.* Прямое вычисление было бы громоздким, и в нем легко ошибиться. Но мы можем сделать мысленно совершенно эквивалентную замену.

Пусть вместо постоянного магнита в соленоид помещен виток с током, так что $IS = m_\mu$. Далее воспользуемся теоремой взаимности, пропустив ток I не через виток, а через обмотку соленоида. Тогда $B = \mu_0 m_\mu n / S$, и магнитный поток через виток, как раз и равный искомому, $\Phi = \mu_0 m_\mu n$.

$$2.72. \Phi = \frac{\pi}{4} \frac{\mu_0 I R_0^2}{R} = \frac{\pi}{40} \mu_0 I R_0.$$

$$2.73. L = \frac{\mu_0 \Lambda}{2\pi} \left(\frac{\mu - 1}{2} + \ln \frac{r_3}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) \simeq 10 \text{ мГн.}$$

$$2.74. \frac{I_1}{I_0} = \frac{H \ln(R/r) + h \ln(R/r_0)}{H \ln(10R/r) + h \ln(R/r_0)} \simeq 0,31.$$

$$2.75. Q = \frac{b}{a+b} \frac{IS}{4\pi\rho} \ln \frac{d+a}{d-a}.$$

2.76. Решение.

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = -\frac{\pi r^2}{R} \frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2 B_0 a v}{R}, \quad \text{где } v = \frac{dh}{dt}.$$

$$F = m \frac{dB}{dh} = -(\pi r^2 a B_0)^2 \frac{v}{R}, \quad \text{где } m = I \pi r^2.$$

$$M \frac{dv}{dt} = -(\pi r^2 a B_0)^2 \frac{v}{R} - Mg, \quad \text{причем } v = 0 \text{ при } t = 0.$$

Отсюда $v = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})$, где $v_\infty = \frac{MRg}{(\pi r^2 a B_0)^2}$; $\tau = \frac{MR}{(\pi r^2 a B_0)^2}$.

$$2.77. I = I_0 (1 - e^{-t/\tau}), \text{ где } I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}; \tau = \frac{L_0}{R}; L_0 = \frac{N^2 S}{l}.$$

2.78. В первичной обмотке ток возрастет, во вторичной — уменьшится.

$$2.79. \mathcal{M} \simeq \mu \mu_0 N_1 N_2 S / l.$$

$$2.80. I = 0,314 \text{ А.}$$

$$2.81. m \frac{\varphi R D}{\mu_0 b n}.$$

$$2.82. I = I_0 \left(1 + \frac{a}{l_0} \cos \omega t \right).$$

$$2.83. V_1 = \frac{\omega B}{2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{1 + C_1/C_2}, \quad V_2 = \frac{\omega B}{2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{1 + C_2/C_1}.$$

2.84. Решение. Если частица движется по круговой орбите, то частота обращения $\omega_B = eB/m$. При импульсе частицы p радиус орбиты равен $R = v/\omega_B = p/eB$. Условие $R = \text{inv}$ эквивалентно следующему: $p \propto B_0$ или, что то же, $\dot{p}/p = \dot{B}_0/B_0$. Ускорение электрона на орбите постоянного радиуса происходит в соответствии с законом $\dot{p} = eE$, где электрическое поле определяется из закона Фарадея:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 2\pi R E = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \langle \dot{B} \rangle.$$

Таким образом, зависимость $E = R \langle \dot{B} \rangle / 2$ подставляется в соотношение

$$\frac{\dot{B}_0}{B_0} = \frac{eE}{ReB_0}.$$

Отсюда следует, что $\dot{B}_0(t) = \langle \dot{B} \rangle(t)/2$ в любой момент времени, что эквивалентно $B_0(t) = \langle B \rangle(t)/2$.

6. Магнитное поле в веществе. Проводники в магнитном поле

2.85. Решение. О направлении силы давления можно сразу сказать, что плоскости должны отталкиваться друг от друга. Вычислим поле, создаваемое токами каждой плоскости (рис. 2.8' а). Ввиду высокой симметрии задачи, силовые линии должны быть просто прямыми, параллельными плоскости. В каждом полупространстве поле однородно — иначе мы могли бы построить контур, который не пересекался бы током, но циркуляция поля была бы ненулевой. На рисунке контур $ABB'A'$ пронизывается током $i \cdot AA'$, а циркуляция поля по нему равна $2 \cdot H \cdot AA'$, так что поле в каждом полупространстве $H_0 = i/2$. В системе параллельных плоскостей (рис. 2.8' б) поле вне ее обратится в нуль, а между плоскостями будет равно $2H_0$, соответственно, индукция $B = \mu_0 i$. Однако в закон Ампера надо подставлять не все это поле, а лишь его половину, потому что ток каждой из плоскостей выталкивается полем другой плоскости, но сам себя он никуда толкать не может. Итак:

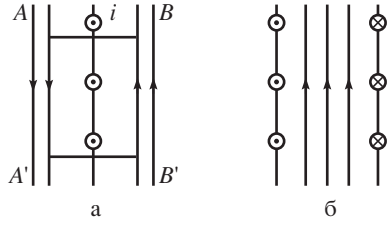


Рис. 2.8'

$$\mathcal{P} = iB_{\text{вз}} = \frac{\mu_0 i^2}{2}$$

2.86. $B_{\text{max}} = 500$ Тл, $P \simeq 10^6$ атм.

2.87. $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 = IB/a \simeq 1$ кПа.

2.88. $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \simeq 2 \cdot 10^{-2}$ Н.

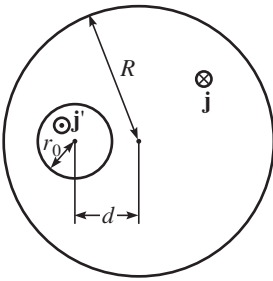


Рис. 2.9'

2.89. Решение. Антипараллельные токи отталкиваются, поэтому стержень, очевидно, будет выталкиваться в радиальном направлении. Учтем, что ток, текущий через стержень, каков бы он ни был, при единственном условии однородности не будет смещать стержень, но будет лишь сжимать его. Следовательно, в выражении для силы $\frac{d\mathbf{F}}{dl} = \int_{\text{ст}} [\mathbf{j}' \mathbf{B}] dS$

(рис. 2.9') мы можем заменить истинное поле $\mathbf{B}$ полем, которое создавал бы ток через электролит с плотностью $j = I/\pi(R^2 - r_0^2)$, но равномерно заполняющий все сечение сосуда, включая область стержня, и получим правильный результат. Обозначим это поле через $\mathbf{B}'$. Тогда (см. решение зад. 2.61)

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 [\mathbf{j}, \mathbf{R}]}{2} = \frac{\mu_0 [I, r]}{2\pi} (R^2 - r_0^2). \text{ Для вычисления}$$

силы $d\mathbf{F}/dl$ заметим, что вектор $[\mathbf{j}', \mathbf{B}']$, где $\mathbf{j}'$ — плотность тока через стержень, направлен строго по радиусу $\mathbf{r}$ и пропорционален r .

$$[\mathbf{j}', \mathbf{B}'] = \frac{I}{\pi r_0^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi (R^2 - r_0^2)} \mathbf{r}.$$

Теперь вычисление интеграла по площади сведется к определению центра тяжести

фигуры сечения стержня: $\int_{\text{ст}} \mathbf{r} dS = \pi r_0^2 \mathbf{d}$. Окончательно

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = \frac{\mu_0 I^2 \mathbf{d}}{2\pi(R^2 - r_0^2)}.$$

2.90. а) $A = 8 \ln 2 \cdot 10^{-7}$ Дж; б) увеличится на $\Delta W = 8 \ln 2 \cdot 10^{-7}$ Дж.

2.91. Решение. Условие равновесия плазменного шнура — баланс силы Ампера и архимедовой силы. В плазме, как и в газе, давление можно выразить через концентрацию частиц и абсолютную температуру: $\mathcal{P} = nk_B T$, где k_B — постоянная Больцмана. Таким образом, плотность архимедовой силы в нашей осесимметричной системе можно представить в виде

$$\mathbf{f}_P = -\nabla nk_B T \Rightarrow (f_P)_r = -nk_B \frac{dT}{dr}.$$

Плотность силы Ампера также имеет только радиальную компоненту:

$$\mathbf{f}_B = [\mathbf{j}, \mathbf{B}] \Rightarrow (f_B)_r = -j_z B_\varphi = -jB.$$

Поле B находится при однородном распределении тока с помощью теоремы о циркуляции: $B = \frac{1}{2} \mu_0 j r$. Из баланса сил следует

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{j^2}{nk_B} r.$$

Интегрируя это уравнение, получаем $T(r) \propto (\text{const} - r^2)$, причем из условия $T \simeq 0$ на внешней границе пинча следует $\text{const} = R^2$, где R — радиус плазменного шнура. Вблизи его оси ($r = 0$) получаем ответ

$$T(0) = \frac{\mu_0}{4} \frac{j^2 R^2}{nk_B},$$

который приобретает окончательный вид после подстановки $j = I/\pi R^2$, $n = (dN/dz)/\pi R^2$:

$$T(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I^2}{k_B (dN/dz)}.$$

Интересно отметить, что при попытке решить задачу, приравнивая константе сумму газокINETического и магнитного давления, мы получили бы результат, отличный от правильного в два раза — в данном случае нельзя пренебречь «натяжением силовых линий».

$$\mathbf{2.92.} \quad F = \frac{3\mu_0}{2\pi} \left(\frac{ISN}{l^2} \right)^2 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Н}; \quad \mathcal{M} = \frac{\mu_0 S^2 N^2}{2\pi l^3} \simeq 20 \text{ нГн}.$$

2.93. а) Внутри пластины $\mathbf{H} = 0$; $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Вне пластины $\mathbf{H} = 0$; $\mathbf{B} = 0$; б) внутри пластины $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{H} = -\mathbf{J}$. Вне пластины $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{H} = 0$.

$$\mathbf{2.94.} \quad B = 2B_A (h/D) = 10^{-2} \text{ Тл}.$$

2.95. Решение. Воспользуемся принципом виртуальных перемещений. «Оторвем» якорь от сердечника; пусть он отодвинут на расстояние x . Дадим величине x малое приращение dx . Тогда $Fdx = \delta A_{\mathcal{E}} - \delta A_I - dW_L$, где $\delta A_{\mathcal{E}}$ — работа источника, δA_I — приращение джоулева тепла, dW_L — изменение энергии магнитного поля. Величины $\delta A_{\mathcal{E}}$ и δA_I должны исчисляться за время перемещения на фоне постоянной мощности, потребляемой электромагнитом, тогда как dW_L зависит лишь от начального и конечного положения якоря. Введем в рассмотрение также величины dI и $d\Phi$ в момент перемещения:

$$\delta A_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(I + dI)dt - \mathcal{E}I dt = \mathcal{E} dI dt = -\mathcal{E} \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{R} = -Id\Phi,$$

$$\delta A_I = R(I + dI)^2 dt - RI^2 dt = 2RI dI dt = -2Id\Phi,$$

$$dW_L = \frac{1}{2}d(LI^2) = \frac{1}{2}I^2 dL = \frac{1}{2}Id\Phi.$$

Таким образом, $W_L = \frac{I\Phi}{2} \Rightarrow F = \frac{1}{2} \frac{Id\Phi}{dx}$. Интересно отметить, что (чисто формально) работа при виртуальном перемещении как раз совпадает с изменением энергии магнитного поля. Для вычисления Φ воспользуемся теоремой о циркуляции:

$$\frac{\Phi}{N\mu_0 S} \Delta L + \frac{\Phi}{N\mu_0 S} 2x = NI, \quad \text{где } \Delta L \equiv 2l + \pi r + \Delta.$$

Максимальное значение F соответствует $x \rightarrow 0$:

$$F_{\max} = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x \rightarrow 0} = \mu_0 S \left(\frac{\mu NI}{\delta L} \right)^2.$$

2.96.

$$L = \frac{2Fl}{\mu_0(\mu - 1)I^2} \simeq 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2.97. $F = \frac{1}{2} \mu_0(\mu - 1)H^2 S.$

2.98. *Решение.* В силу граничного условия для нормальной компоненты $\mathbf{B}$, B в зазоре равно B в сердечнике. Используем теорему о циркуляции $\frac{B}{\mu_0} \Delta + Hl = NI$. А теперь объединяем график рис. 2.32 б и линейную зависимость $B(H)$, следующую из полученного уравнения. Результат представлен на рис. 2.10'. Ответ: $B \simeq 1,5$ Тл.

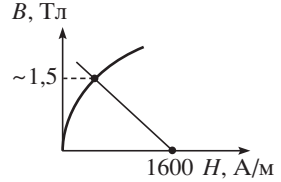


Рис. 2.10'

2.99. $F(d) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{rIN}{(R/\mu + d/\pi)} \right]^2.$

2.100. $A = \frac{\mu_0 S (\mu NI)^2}{2L(\mu + L/l)}.$

2.101. $\Delta Q = 2\pi B_{\text{нас}} \Delta H r^2 L \nu \Delta t = 120 \text{ Дж.}$

2.102. *Решение.* Скачок индукции $\mathbf{B}$ на плоской доменной границе может быть связан с линейной плотностью тока намагничивания $i = dI/dl$:

$$\Delta \mathbf{B} = 2\mathbf{J}_0; \quad \Delta B = i \Rightarrow i = 2J_0.$$

Поскольку электрон располагается от пленки на расстоянии $L \gg h$, для него ток намагничивания будет выглядеть как линейный ток $I = ih$, создающий в точке, где находится электрон, поле

$$H = \frac{I}{2\pi L} = \frac{J_0 h}{\pi L}.$$

Согласно результату зад. 2.54, электрон может двигаться равномерно в скрещенных полях только при условии $\varepsilon_0 E^2 \ll \mu_0 H^2$. Таким образом, для нашего случая получаем

$$E \ll \frac{1}{\pi} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} J_0 \frac{h}{L}.$$

7. Квазистационарное электромагнитное поле. Переменный ток

2.103. а) 3,2 А; б) 5 А.

2.104. а) 314 В; б) 157 В.

2.105. $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, $\delta = \frac{R}{2L}$, где $L = L_1 - \frac{\mathcal{M}^2}{L_2}$. Резонанс недостижим, если $(R/2L)^2 > 1/LC$, т.е. если

$$\frac{R^2 C}{4} > L_1 - \frac{\mathcal{M}^2}{L_2}.$$

2.106. *Решение.* При быстром удалении сердечника изменяется индуктивность дросселя и ток через него, но магнитный поток измениться мгновенно не может:

$$\Phi = L_1 \frac{\mathcal{E}}{R} = L_2 I_0,$$

где I_0 — ток через дроссель в момент $t = 0$. В последующие моменты времени цепь подчиняется уравнению

$$I \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} (L_1/L_2) \right) = IR + L_2 \frac{dI}{dt}.$$

Решение этого уравнения с правой частью имеет вид

$$I(t) = I \exp\left(-\frac{R}{L_2} t\right) + \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Его нужно еще связать с начальным условием $I(t=0) = I_0$. Отсюда следует ответ (рис. 2.11'):

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} \exp\left(-\frac{R}{L_2} t\right) \right].$$

2.107. $Q = \frac{q_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$

2.108. *Решение.* Исходим из уравнения контура $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$. Собственные значения: $\lambda_{12} = -R/2L \pm \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}$ оказываются при заданном в задаче условии комплексными, а значит, режим релаксации — колебательным. Это будет тем более верно, если конденсатор отсутствует, а вместо него в игру вступают малые паразитные емкости. Запишем общее решение при $U(0) = U_0$:

$$U = U_0 e^{-\gamma t} [\cos \omega t + \alpha \sin \omega t],$$

где $\gamma = R/2L$, $\omega = \sqrt{(LC)^{-1} - \gamma^2}$.

$$I = \dot{Q} = CU_0 e^{-\gamma t} [(\alpha\omega - \gamma) \cos \omega t + (\alpha\gamma + \omega) \sin \omega t].$$

Константу α определим из условия $I(0) = U_0/R = CU_0(\alpha\omega - \gamma)$. Таким образом, $\alpha = (\omega RC)^{-1} + \gamma/\omega$,

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\gamma}{\omega} + \frac{1}{\omega RC} \right) \sin \omega t \right].$$

2.109. $L = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right), \quad \mathcal{M} = \frac{1}{4C} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right).$

2.110. $\mathcal{M} = \frac{1}{2} \left(L_1 \frac{C_1}{C_2} - L_2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega^2 C_2} - L_2 \right).$

2.111. $|\mathcal{M}| = L_2$.

2.112. $\omega_1/\omega_0 = \sqrt{\varepsilon} = 2$; а) $I_1 = I_0, q_1 = q_0/2$; б) $I_1 = 2I_0, q_1 = q_0$.

2.113. *Решение* 1. Будем считать, что $\omega\lambda \ll 1/(\mu_\mu r_0^2)$. При этом условии можно пренебречь скинированием токов Фуко в сердечнике. Тогда можно считать магнитное поле внутри сердечника однородным и записать закон Фарадея в виде

$$E2\pi r = \omega\pi r^2 B \sin \omega t \Rightarrow E = \frac{B_0}{2} \omega r \sin \omega t,$$

где $E(r)$ — вихревое электрическое поле. Подсчитаем мощность энерговыделения на единицу длины сердечника:

$$\frac{d}{dl}(\dot{W}) = \int j\lambda^{-1} j dS = \frac{1}{4} \lambda \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \int_0^{r_0} 2\pi r^3 dr.$$

Таким образом, потери на единицу длины

$$\frac{d}{dl} \Delta W = \frac{\pi^2}{8} B_0^2 r_0^4 \omega \lambda = \frac{\pi^2}{2} \frac{\langle BH \rangle_T}{2} \mu \mu_0 r^4 \omega \lambda.$$

С другой стороны, полная энергия, запасенная в контуре, равна

$$W = W_L + W_C = 2\langle W_L \rangle_T = \langle BH \rangle_T \pi r_0^2 l.$$

Вспоминая определение добротности, получаем ответ:

$$Q = \frac{8}{\mu \mu_0 \omega \lambda r_0^2}.$$

Решение 2. Рассмотрим ту же задачу в пределе высоких частот, когда токи Фуко заведомо скинированы, т.е. $\omega\lambda \gg 1/(\mu_\mu r_0^2)$. Теперь ток и поле в сердечнике будут сосредоточены в тонком слое δ_{ef} , прилегающем к поверхности, где $\delta_{\text{ef}} \simeq (2\pi)^{1/2}/(\omega\lambda\mu\mu_0)^{1/2}$. Чтобы не смешивать эффекты разной природы, предположим, что магнитная проницаемость от частоты не зависит.

Полагая неравенства достаточно сильными, мы не будем решать точной задачи о распределении полей и энерговыделения, а ограничимся оценочными формулами, а именно:

$$\frac{d}{dl} \dot{W} = \int j\lambda^{-1} j dS = \frac{1}{4} \lambda \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \cdot 2\pi r \delta_{\text{ef}}^3$$

и далее

$$\frac{d}{dl} \Delta W \simeq \pi^2 \langle BH \rangle_T \mu \mu_0 \omega \lambda r_0 \delta_{\text{ef}}^3.$$

Окончательный результат

$$Q = \frac{4}{\mu \mu_0 \omega \lambda \delta_{\text{ef}}^2} \sim 1.$$

$$2.114. \delta_{\text{ан}} \simeq \frac{c}{(2\pi\omega\lambda c/l_e)^{1/3}}.$$

2.115. а) Резонанс токов $Z^{-1} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; б) резонансы напряжений $Z = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}/\sqrt{LC} \simeq 0,52/\sqrt{LC}$, $\omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}/\sqrt{LC} \simeq 1,93/\sqrt{LC}$. Зависимость сдвига фазы от частоты представлена на рис. 2.12'.

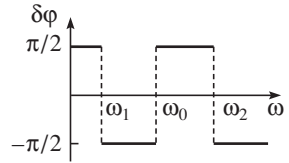


Рис. 2.12'

$$2.116. \text{ а) } I_A = \frac{3\mathcal{E}}{n(9r + 2R)}; \text{ б) } I_A = \frac{6\mathcal{E}}{n(9r + 2R)}.$$

2.117. а) 0; б) напряжение опережает ЭДС:

$$\delta = \arctg \frac{\omega(L + CrR)}{r + R(1 - \omega^2 CL)}.$$

2.118. $\frac{N}{N_0} = \frac{(1+n)(1+2n^2)}{1+4n^2} \simeq 13$, где N_0 — мощность при разомкнутой и N — при замкнутой цепи.

2.119. Амплитуды на входе и на выходе одинаковы:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega RL}{\omega^2 - R^2}.$$

$$2.120. \frac{d^2 V}{dt^2} + 2\gamma \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0, \text{ где } \gamma = \frac{1}{2RC}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$2.121. W = W_0/2; \tau = 1/2\pi\Delta\nu = 0,16 \text{ с.}$$

$$2.122. 1) f(t) = (A/2)[1 + e^{2i\omega t}/2 + e^{-2i\omega t}/2];$$

$$2) f(t) = (A/2)[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} + (m/2)e^{i(\omega+\Omega)t} + (m/2)e^{-i(\omega+\Omega)t} + (m/2)e^{i(\omega-\Omega)t} + (m/2)e^{-i(\omega-\Omega)t}];$$

$$3) f(t) = (A/2)[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} + (im/2)e^{i(\omega+\Omega)t} + (im/2)e^{-i(\omega+\Omega)t} + (im/2)e^{i(\omega-\Omega)t} + (im/2)e^{-i(\omega-\Omega)t}].$$

2.123. *Решение.* Раскачать колебания в контуре можно, если гармоники в разложении сигнала попадут в пределы резонансной кривой. Сигнал, поступающий на контур при периодическом замыкании-размыкании ключа, можно представить в виде $U(t) = U_0 F(t) G(t)$, где $F(t) = (1/2)[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$, а функция $G(t)$ показана на рис. 2.13'. Ее можно представить в виде ряда:

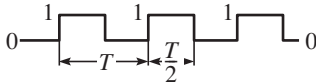


Рис. 2.13'

$$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\Omega t}, \quad \text{где } \Omega = 2\pi/T;$$

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} G(t) e^{in\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\Omega t) dt = \frac{1}{\pi n} N,$$

где $N = 2$ при $n = 2k + 1$ и $N = 0$ при $n = 2k$. Таким образом,

$$U = \frac{U_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1} [e^{-i(\omega+(2k+1)\Omega)t} - e^{i(\omega-(2k+1)\Omega)t}].$$

Очевидно условие резонанса: $\Omega(2k+1) \in (\Delta\omega - \delta, \Delta\omega + \delta)$, а амплитуда отклика будет максимальной при $\Omega \in (\Delta\omega - \delta, \Delta\omega + \delta)$.

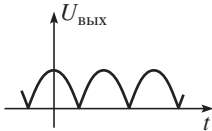


Рис. 2.14'

$$2.124. V_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} V_0 |\cos \omega_0 t| \text{ (рис. 2.14')}. \quad \tau/2$$

$$2.125. f_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{A}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{A}{\pi\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}.$$

2.126. Решение. При пролете одиночного электрона работа источника $IUdt = eEdx = (eU/l)dx$, где l — ширина зазора. Отсюда $I(t) = (e/l)(dx/dt) = (eat)/(a\tau^2/2) = 2et/\tau^2$. Спектр такого сигнала находится из преобразования Фурье:

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(t)e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{2et}{\tau^2} \exp(i\omega t) dt = \frac{e \cdot \exp(i\omega\tau)}{\pi i \omega \tau} + \frac{e}{\pi(\omega\tau)^2} [\exp(i\omega\tau) - 1].$$

8. Уравнения Максвелла

$$2.127. \frac{W_m}{W_3} = \frac{1}{8} \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 (\omega R)^2.$$

$$2.128. \frac{W_3}{W_m} = \frac{1}{8} \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 (\omega R)^2.$$

2.129. При учете конечного сопротивления вектор Пойнтинга имеет две компоненты: параллельная проводам по-прежнему направлена на нагрузку, а нормальная к поверхности провода обеспечивает поток энергии в проводник, который уравнивается джоулевым тепловыделением.

2.130. Искомый поток равен нулю вследствие полной компенсации тока проводимости током смещения.

2.131. Решение (рис. 2.15'). Вектор S всюду будет параллелен оси пучка и направлен туда же, куда и скорость частиц. Электрическое поле ищется из теоремы Гаусса, магнитное — из теоремы о циркуляции. Результаты будут различными при $r > r_0$ (индекс in) и $r < r_0$ (индекс ex). Как всегда в симметричных конфигурациях, ток вне контура или заряд вне поверхности интегрирования на величине поля не сказываются.

Плотность тока в пучке $j = ne(2w/m)^{1/2}$. Далее,

$$E_{in} = \frac{ner}{2\varepsilon_0}, \quad H_{in} = \frac{rj}{2} = rne\sqrt{\frac{w}{2m}}, \quad S_{in} = \frac{n^2e^2r^2}{4\varepsilon_0} \sqrt{\frac{2w}{m}};$$

$$E_{ex} = \frac{neR^2}{2\varepsilon_0r}, \quad H_{ex} = \frac{R^2j}{2r} = \frac{R^2ne}{r} \sqrt{\frac{w}{2m}}, \quad S_{ex} = \frac{n^2e^2R^4}{4\varepsilon_0r^2} \sqrt{\frac{2w}{m}}.$$

2.132. Решение (рис. 2.16'). В плоскости симметрии ленты магнитное поле равно нулю, вне ее силовые линии лежат в плоскостях $y = \text{const}$, причем, как следует из теоремы о циркуляции, $B(j) = jy$. В отсутствие сопротивления единственный источник электрического поля — эффект Холла, но не во внешнем магнитном поле, которого здесь нет, а в собственном поле тока:

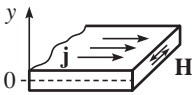


Рис. 2.16'

$$-ne\mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{B}] = 0; \quad \mathbf{j} \perp \mathbf{B} \Rightarrow E = \frac{j\mu_0}{ne} H = \frac{\mu_0 j^2 y}{ne}.$$

При этом вектор $\mathbf{E}$ направлен извне по направлению к плоскости симметрии проводника. Таким образом, искомый вектор Пойнтинга оказывается антипараллельным вектору $\mathbf{j}$ (т.е. сонаправлен со скоростью электронов — носителей тока) и равен $S = \mu_0 j^3 y^2 / ne$.

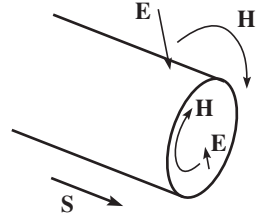


Рис. 2.15'

$$2.133. S_z = \frac{1}{2\pi} \frac{I^2 R}{r^2 \ln(r_2/r_1)}; \quad S_\varphi = \frac{IR^2 n}{r \ln(r_2/r_1)}. \text{ Полный поток энергии через сечение } Q_W = I^2 R.$$

$$2.134. W = \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{E}^2 \pi r^2}{2lR^2} \equiv \frac{LI^2}{2}.$$

9. Электромагнитные волны

2.135. $N_{\text{вых}} = N_0(1 - r^2) \simeq 89 \text{ кВт}$, где $r^2 = (l - 1)^2 / (l + 1)^2$ — коэффициент отражения по мощности.

$$2.136. u = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \simeq \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

2.137. *Решение.* Отличие коэффициента отражения от единицы обусловлено джоулевой диссипацией в скин-слое, т.е. на глубине вплоть до $\delta_{\text{ef}} \simeq (2\pi)^{1/2} / (\omega \lambda \mu_0)^{1/2}$. Удобно вычислять связанные с этим потери, относя их к единице площади поверхности зеркала, а затем получить коэффициент отражения, нормируя эту диссипацию на поток энергии. Итак:

$$\frac{d^2 W}{ds dt} \simeq \frac{j^2}{\lambda} \delta_{\text{ef}} = \lambda E^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \lambda \mu_0}}.$$

Модуль вектора Пойнтинга, равный потоку энергии на поверхность зеркала, можно представить в виде

$$|\mathbf{S}| = \frac{k}{\mu_0 \omega} E^2 = \frac{E^2}{c \mu_0}.$$

Отнеся интенсивность потерь к потоку энергии, получим коэффициент поглощения по энергии; вычитая последний из единицы, получим коэффициент отражения по мощности R :

$$R = 1 - \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{\mu_0 \omega}} c \mu_0 \simeq 1 - c \sqrt{\frac{2\pi\lambda \mu_0}{\omega}}.$$

Поскольку отраженная волна представляет собой электромагнитную волну той же частоты, что и падающая, и с тем же соотношением между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, амплитудный коэффициент отражения равен просто квадратному корню из коэффициента отражения по мощности: $r = \sqrt{R}$. Точность полученных нами результатов не слишком велика — именно потому, что не слишком точно оцененную величину приходится вычитать из единицы. Гораздо более надежна оценка коэффициента поглощения по мощности:

$$1 - R = c \sqrt{\frac{2\pi\lambda \mu_0}{\omega}},$$

которая позволяет правильно оценить порядок величины потерь при отражении.

$$2.138. R = \left(\frac{l-1}{l+1} \right)^2 \simeq 0,67.$$

2.139. *Решение.* Сила Лоренца не совершает работы над заряженной частицей, но при ее движении по круговой орбите (а это — движение с ускорением) происходит излучение электромагнитных волн, оно-то и тормозит частицу. Мы сделаем одно упрощающее предположение: пусть энергия, потерянная на излучение за один оборот, будет много меньше кинетической энергии электрона. Дипольный момент единственной частицы $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$. Удобно поместить начало координат в центре циклотронной орбиты, тогда $p_0 = ev/\omega_B$, где v — скорость электрона на

орбите, а $\omega_B = eB/m$ — циклотронная частота. Поскольку диполь в данном случае вращается, а не осциллирует, интенсивность потерь нужно удвоить:

$$\dot{W} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega_B^4}{c^3} = \frac{e^2 v^2 \omega_B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{W_e}{3\pi} \frac{e^2 \omega_B^2}{m\epsilon_0 c^3},$$

где W_e — кинетическая энергия электрона. Составляя уравнение $dW_e/dt = -\dot{W}$, находим, что кинетическая энергия электрона должна убывать по экспоненциальному закону:

$$W_e \propto \exp\left(-\frac{1}{3\pi} \frac{e^2 \omega_B^2}{m\epsilon_0 c^3} t\right).$$

Как обычно при экспоненциальном затухании, характерное время остановки не зависит от начальной энергии — по смыслу это масштаб времени, по истечении которого энергия становится существенно меньше начальной. Это время можно выразить через характерное число оборотов:

$$\tau = 3\pi \frac{m^2 \epsilon_0 c^3}{e^2 \omega_B^2} \equiv \frac{N}{\omega_B}.$$

Отсюда и получаем ответ:

$$N = 3\pi \frac{m^2 \epsilon_0 c^3}{e^3 B}.$$

Наше предположение о малости потерь за период эквивалентно сильному неравенству $N \gg 1$, что приводит к следующему условию на поле:

$$B \ll 3\pi m^2 \epsilon_0 c^3 e^{-3} \sim 10^{12} \text{ Тл}.$$

Оно с запасом выполнено при всех доступных значениях поля. Соответственно, с большим запасом выполнено условие $N \gg 1$, так что при рассмотрении не слишком большого числа оборотов частицы в магнитном поле мы вполне можем пользоваться приближением стационарной орбиты.

$$2.140. \langle E^2 \rangle_r = \frac{\langle E^2 \rangle_r (n^2 - 1)^2}{2 (n^2 + 1)^2} \simeq 0,07 \langle E^2 \rangle_i.$$

$$2.141. \mathcal{P} = \frac{2r^2 |S_i|}{c^2} = \frac{2}{c^2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle_i.$$

2.142. *Решение.* Из условия $\tan \varphi = n$ находим $\varphi = 56^\circ 19'$. Искомая величина Δ_t может быть выражена через коэффициенты прозрачности:

$$\Delta_t = \frac{|\langle t_\perp^2 \rangle - \langle t_\parallel^2 \rangle|}{\langle t_\perp^2 \rangle + \langle t_\parallel^2 \rangle}.$$

Далее, учитывая, что $\sin \varphi = n \sin \psi = n \cos \psi$, подстановкой в формулы Френеля получаем:

$$\Delta_t = \frac{\cos^{-2}(\varphi - \psi) - 1}{\cos^{-2}(\varphi + \psi) - 1} = \frac{1 - 4n^2/(1 + n^2)}{1 + 4n^2/(1 + n^2)} \simeq 0,08.$$

2.143. *Решение.* Задача отличается от задачи о скин-эффекте тем, что, согласно условию, ток смещения доминирует над током проводимости, что сразу следует из уравнений Максвелла в Фурье-представлении:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \omega \mathbf{B}; \quad (\mu\mu_0\omega)^{-1} [\mathbf{k}[\mathbf{k}, \mathbf{E}]] = -(\mu\mu_0\omega)^{-1} k^2 \mathbf{E} = -i\lambda \mathbf{E} - \omega\epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Поэтому в данном случае мы будем иметь дело не с квазистационарным профилем тока, а с проникающей в среду электромагнитной волной. Для нее, однако, частота и волновое число не могут быть одновременно вещественными, как нетрудно увидеть из второго уравнения. Постановка задачи соответствует пространственному

затуханию волны, поэтому комплексным нужно выбрать k , причем, в силу малости проводимости, относительно малой будет и мнимая часть:

$$k \equiv k_0 + i\kappa \implies E, B \propto \exp(-\kappa x), \quad \kappa \ll k_0,$$

где x — координата по направлению вглубь среды от границы. После сокращения амплитуды $\mathbf{E}$ получаем:

$$\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 + i\frac{\lambda\mu_0}{\omega} = \frac{k^2}{\omega^2} \simeq \frac{k_0^2}{\omega^2} + \frac{2ik_0\kappa}{\omega^2}.$$

Из главных членов этого равенства следует, как обычно, $\omega/k = c/n$; приравнявая члены первого порядка малости, получаем

$$\kappa = \lambda\mu_0 \frac{c}{2n}.$$

Таким образом, эффективная глубина проникновения, определенная через показатель экспоненты, оказывается равной

$$\delta_{\text{ef}} = \kappa^{-1} = \frac{2n}{\lambda\mu_0 c}.$$

Заметим, что из условия $\kappa \ll k$, которое, в свою очередь, есть следствие малой проводимости, вытекает, что глубина проникновения многократно превосходит длину волны.

$$2.144. \Delta\lambda \simeq (\lambda/\lambda_0)^2 \delta\lambda = 50 \text{ нм}.$$

10. Газовый разряд. Элементы физики плазмы

2.145. Указание. См. решение задачи 2.126.

$$I = \frac{|e|}{d}(v_1 + v_2) \quad \text{при} \quad 0 < t < t_1 = \frac{x}{v_1};$$

$$I = \frac{|e|}{d}v_2 \quad \text{при} \quad t_1 \leq t < t_2 = \frac{d-x}{v_2};$$

где d — зазор диода, x — координата рождения ионной пары, v_1, v_2 — скорости ионов в зазоре. Полный заряд $q = |e|$.

$$2.146. N_{\mp} = \frac{I_s}{eSa} \simeq 6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

$$2.147. R = \frac{2\pi B_0 R_0^2}{\mu_0 I} \simeq 4 \text{ мм}.$$

2.148. Решение. Из механики известна барометрическая формула Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgx}{k_B T}\right),$$

где m — масса отдельной молекулы, g — ускорение силы тяжести, ось Ox направлена вертикально вверх. Эта формула — частный случай гораздо более общего закона, который называется статистическим распределением Больцмана. В случае произвольной потенциальной функции $U(r)$ он имеет вид

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right).$$

Распределение Больцмана для электронов и ионов в нашем случае можно линеаризовать:

$$n_i = n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{k_B T}\right) \simeq n_0 \left(1 - \frac{e\varphi}{k_B T}\right); \quad n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T}\right) \simeq n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{k_B T}\right),$$

затем подставить в уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon}(n_e - n_i) \simeq \frac{2ne^2}{\varepsilon_0 k_B T} \equiv \frac{2}{r_D^2} \varphi.$$

Уравнение получилось линейным и однородным, причем корни характеристического уравнения вещественны:

$$\varphi(x) = \varphi_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{r_D} x\right) + \varphi_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{r_D} x\right).$$

Принимая во внимание граничные условия

$$x = 0, \quad \varphi = 0, \quad x = a, \quad \varphi = U,$$

приходим к следующему ответу:

$$\varphi(x) = U \frac{\text{sh}(x\sqrt{2}/r_D)}{\text{sh}(a\sqrt{2}/r_D)}.$$

2.149. Угол отражения равен углу падения;

$$n_k = \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{e^2} \cos^2 \theta.$$

2.150. $n > \frac{\varepsilon_0 m \omega^2}{e^2}.$

2.151. Чтобы электромагнитная волна могла достигнуть Земли, ее длина должна быть $\lambda < \frac{3,3 \cdot 10^7}{\sqrt{n}} \text{ м} \simeq 2,3 \text{ м}.$

2.152. $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \omega_{\text{pe}}^2 = \omega_0^2 + \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m} = \omega_0^2 + \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{I}{\sqrt{2mW}} \Rightarrow \omega \simeq 1,44 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$

Г л а в а ІІІ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Кинематика колебаний

3.2. Векторное изображение колебаний S_1, S_2, S_3 показано на рис. 3.1'. Их комплексные амплитуды есть соответственно:

$$f_1 = 2, \quad f_2 = e^{i\pi/2}, \quad f_3 = 3e^{i\pi/6}.$$

Сумму колебаний S_2 и S_3 находим с помощью треугольника векторов (см. рисунок) по теореме косинусов:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Квадрат амплитуды суммарного колебания (интенсивность) есть

$$a^2 = 1 + 9 + 2 \cdot 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 13, \quad a = \sqrt{13}.$$

Начальная фаза колебания

$$\operatorname{tg} \varphi = 5/3\sqrt{3}.$$

3.3. В случае а) векторы S_1, S_2 и их сумма $S = S_1 + S_2$ составляют равносторонний треугольник, поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В случае б) три вектора составляют прямоугольный треугольник (рис. 3.2') поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

3.4. Векторная диаграмма показана на рис. 3.3'. Слагаемые колебания (вектора) составляют правильный многоугольник, вписанный в окружность, радиус которой равен

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Амплитуда суммарного колебания (длина суммарного вектора) равна

$$A = 2R \sin \frac{N\alpha}{2}.$$

$$\text{Окончательно } A = a \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Амплитуда максимальна и равна $A = Na$, если колебания синфазны: $\alpha = 2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$).

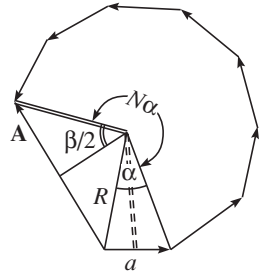
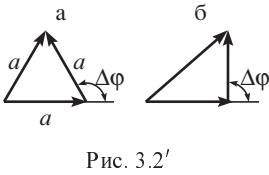
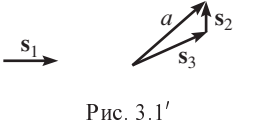


Рис. 3.3'



3.5. Уравнения фазовых траекторий — эллипсы — и соответствующее положение изображающих точек M_1, M_2, M_3 показаны на рис. 3.4'. Уравнения эллипсов имеют вид

$$\frac{S_1^2}{2^2} + \frac{\dot{S}_1^2}{(2\omega_1)^2} = 1; \quad \frac{S_2^2}{1^2} + \frac{\dot{S}_2^2}{\omega^2} = 1;$$

$$\frac{S_3^2}{3^2} + \frac{\dot{S}_3^2}{(3\omega)^2} = 1.$$

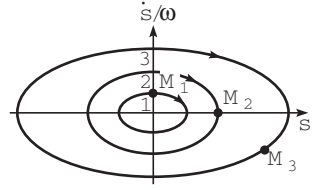


Рис. 3.4'

3.6. Уравнения модулированных колебаний имеют соответственно вид: $s_1 = 2a_0 \cos^2 \Omega t \times \cos(\omega t + \varphi_0)$; б) $S_2 = (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega t + \varphi_0)$.

При $m > 1$ колебание S_2 модулировано не только по амплитуде, но и по фазе — при изменении знака a фаза колебания изменяется на π .

3.7. Уравнения фазово-модулированных колебаний имеют вид: а) $S_1 = a \cos(\omega t + m \cos \Omega t)$; б) $S_2 = a \cos[(\omega + \Omega)t]$. Амплитудно-модулированное колебание изображается вектором, угол наклона которого фиксирован, а длина вектора изменяется со временем в соответствии с законом модуляции $a(t)$. Фазово-модулированное колебание изображается вектором неизменной длины, угол наклона которого меняется в соответствии с законом $\varphi(t)$.

3.8. Сумма колебаний S_1 и S_2 есть

$$S = a \cos \omega t + a \cos[(\omega + \Omega)t] = 2a \cos \frac{\Omega t}{2} \cos \left[\left(\omega + \frac{\Omega}{2} \right) t \right].$$

Амплитуда суммарного колебания: $A(t) = 2a \left| \cos \frac{\Omega t}{2} \right|$.

3.9. Амплитуда суммарного колебания определяется формулой

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Omega t,$$

где $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ — разность частот.

Максимальная и минимальная интенсивности $I = a^2$ суммарного колебания равны соответственно $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$; $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, где I_1 и I_2 — интенсивности слагаемых колебаний. Из условия $I_{\max} = 2I_{\min}$ находим

$$\frac{I_2}{I_1} \simeq \frac{1}{36}.$$

3.10. Спектральные разложения колебаний S_1 и S_2 есть

$$S_1(t) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \cos 2\omega_0 t,$$

$$S_2(t) = a \cos \omega_0 t + \frac{am}{2} \cos[(\omega - \Omega)t] + \frac{am}{2} \cos[(\omega + \Omega)t].$$

Спектральное разложение колебания S_3 найдем, используя условие малости глубины модуляции фазы $m \ll 1$, а также приближенные равенства $\sin(m \cos \Omega t) \simeq m \cos \Omega t$, $\cos(m \cos \Omega t) \simeq 1$, справедливые при $m \ll 1$ с точностью до членов порядка m . После несложных тригонометрических преобразований получим

$$S_3 = a \cos \omega_0 t + \frac{am}{2} \cos \left[(\omega + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{am}{2} \cos \left[(\omega - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right].$$

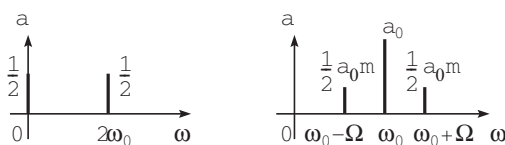


Рис. 3.5'

Спектр колебания S_3 отличается от S_2 только сдвигом фазы на $\pi/2$ боковых спектральных компонент (на частотах $\omega \pm \Omega$). Графическое изображение спектров показано на рис. 3.5'.

3.11. Периодическая функция $S(t)$ с периодом T представляется в виде ряда Фурье:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

где коэффициенты a_n ряда (амплитуды спектральных гармоник) определяются формулой ($S(t)$ — четная функция):

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

используя которую, находим

$$a_0 = \frac{\tau}{T}, \quad a_n = \frac{2\tau}{T} \left(\frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} \right).$$

Спектр показан на рис. 3.6' (отрицательным значениям a_n , соответствует изменение начальной фазы гармоник на частотах $n\omega_0$ на π).

3.12. Спектр непериодической функции $S(t)$ (ее преобразование Фурье) имеет вид

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В нашем случае ($S(t)$ — единичный прямоугольный импульс длительности τ) находим

$$C(\omega) = \tau \left(\frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} \right).$$

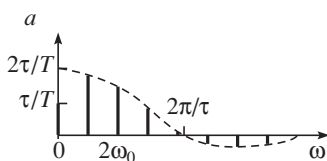


Рис. 3.6'

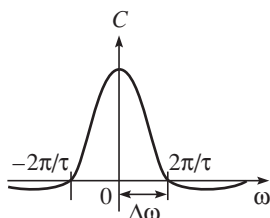


Рис. 3.7'

Спектр $C(\omega)$ показан на графике (рис. 3.7'). В отличие от задачи 3.1', в данном случае имеем непрерывный спектр, вклад в суммарный сигнал $S(t)$ дают гармонические колебания на всех частотах ω , а не только на дискретных частотах $n\omega_0$. Связь между спектром отдельного импульса и спектром периодической последовательности таких же одинаковых импульсов, как видно из сравнения задач 3.11 и 3.12, имеет вид $a_n \sim C(n\omega_0)$, т.е. спектр отдельного импульса является огибающей частоты

спектральных компонент периодической последовательности импульсов. Ширину спектра принято оценивать по ширине главного максимума функции $C(\omega)$ (определяемого положением первого нуля): $\omega t/2 = \pi$. Отсюда следует соотношение неопределенностей: $\Delta\omega\tau = 2\pi$.

3.13. Пусть $S(t) = p(t) \cos \omega_0 t$. Используя формулу Эйлера $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$, получаем:

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \int S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int p(t) e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int p(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} C_1(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} C_1(\omega - \omega_0), \end{aligned}$$

где $C_1(\omega)$ — спектр прямоугольного импульса $p(t)$ (см. решение зад. 3.12). Сравнивая последнее выражение со спектром отдельного импульса мы видим, что каждая спектральная компонента импульса, имеющая частоту ω , смещается на частоту $\omega_0 \pm \omega$ (ω_0 — несущая частота), при этом амплитуды спектральных гармоник на этих частотах уменьшаются вдвое. Таким образом, спектр обрывка косинусоиды имеет вид, показанный на рис. 3.8'.

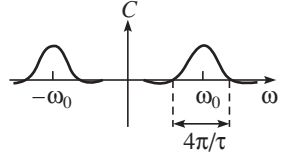


Рис. 3.8'

3.14. Уравнения $S_x = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $S_y = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ можно рассматривать как уравнения некоторой траектории, записанные в параметрической форме (параметром служит t). Перепишем эти уравнения, используя известные тригонометрические формулы, в виде

$$\frac{S_x}{a_1} = \cos \varphi_1 \cos \omega t + \sin \varphi_1 \sin \omega t, \quad \frac{S_y}{a_2} = \cos \varphi_2 \cos \omega t + \sin \varphi_2 \sin \omega t.$$

Умножим первое уравнение на $\cos \varphi_2$ второе — на $-\cos \varphi_1$ и сложим результаты.

Получаем $\frac{S_x}{a_1} \cos \varphi_2 - \frac{S_y}{a_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. Умножим теперь первое

уравнение на $\sin \varphi_2$, а второе — на $-\sin \varphi_1$, и также сложим результаты $\frac{S_x}{a_1} \sin \varphi_2 -$

$-\frac{S_y}{a_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. Возводя в квадрат оба последних уравнения и сложив левые и правые части получившихся равенств, находим окончательно

$$\frac{S_x^2}{a_1^2} + \frac{S_y^2}{a_2^2} - 2 \frac{S_x S_y}{a_1 a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Мы получили уравнение второго порядка, причем максимальные по модулю значения S_x и S_y ограничены величинами a_1 и a_2 соответственно, поэтому эллипс вписан в прямоугольник со сторонами $2a_1$, $2a_2$. В случае синфазных колебаний $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$ из уравнения эллипса получаем

$$\left(\frac{S_x}{a_1} - \frac{S_y}{a_2} \right)^2 = 0.$$

Откуда $S_y = \frac{a_2}{a_1} S_x$. Это — уравнение прямой, лежащей в первом и третьем

квадрантах, вектор $\mathbf{S}$ колеблется вдоль этой прямой туда-сюда, мы получаем линейно-поляризованное (или плоско-поляризованное колебание). Если колебания противофазны $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$, то из уравнения эллипса получаем

$\left(\frac{S_x}{a_1} + \frac{S_y}{a_2}\right)^2 = 0$, откуда $S_y = -\frac{a_2}{a_1}S_x$. Это — уравнение прямой, лежащей во втором и четвертом квадрантах. Снова имеем плоско-поляризованное колебание, однако с иной ориентацией плоскости колебаний. Наконец, при $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ получаем из общего уравнения эллипса

$$\left(\frac{S_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{a_2}\right)^2 = 1.$$

Это — эллипс, главные оси которого ориентированы вдоль осей S_x и S_y . Причем конец вектора $\mathbf{S}$ движется по эллипсу по часовой стрелке. При $a_1 = a_2$ эллипс превращается в окружность. При $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ получаем тот же эллипс, однако конец вектора $\mathbf{S}$ движется по нему против часовой стрелки.

3.15. Значения S_x и S_y повторяются через промежуток времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$, так как фазы колебаний S_x и S_y изменяются через время $\frac{2\pi}{\omega}$ на $2\pi n$ и $2\pi m$ соответственно. Поэтому конец вектора $\mathbf{S}$ оказывается в той же точке. При $n = m$ фигура Лиссажу превращается в эллипс (см. зад. 3.14). Для фигуры, показанной на рисунке, отношение периодов $T_x = 2T_y$.

2. Свободные колебания в линейных системах

3.16. Решение. Для системы а) второй закон Ньютона имеет вид $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha$, где $x = l\alpha$ (см. рис. 3.3). Полагая колебания малыми $\sin \alpha \simeq \alpha$, находим окончательно $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$, где $\omega = \sqrt{g/l}$. Для системы б) второй закон Ньютона имеет вид $I\ddot{\alpha} = -lmg \sin \alpha$, где I — момент инерции тела относительно оси O , $-lmg \sin \alpha$ — момент силы тяжести относительно той же оси. Окончательно имеем, полагая колебания малыми ($\sin \alpha \simeq \alpha$): $\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$, где $\omega = \sqrt{mgl/I}$. Для системы в) второй закон Ньютона есть $m\ddot{x} = -kx$, где $-kx$ — сила упругости, действующая на груз со стороны деформированной пружины (последнее справедливо при малых деформациях). Окончательно находим $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{k/m}$. Легко проверить, что решением полученных уравнений во всех трех случаях является гармоническое колебание, т.е. функция вида $a \cos(\omega t + \varphi)$, при любых постоянных значениях a и φ .

3.17. Используя второй закон Кирхгофа для замкнутой квазистационарной цепи (сумма падений напряжения на всех участках замкнутой цепи равна сумме ЭДС), имеем $\frac{q}{C} = -L\ddot{q}$, где $\frac{q}{C}$ — падение напряжения на конденсаторе, $-L\ddot{q}$ — ЭДС индукции в катушке индуктивности L . Поскольку $\dot{I} = \dot{q}$, имеем $L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$, или, окончательно, $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, где $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

$$\mathbf{3.18.} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{pE}}.$$

3.19. С помощью теоремы Гаусса найдем напряженность электрического поля на расстоянии r от центра облака и, соответственно, силу, действующую на

электрон:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3, \quad F = -qE = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

Используя второй закон Ньютона $m\ddot{r} = F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$, получаем $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$,

где $\omega = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$ — частота колебаний. Окончательно находим

$$\nu = \frac{2\pi}{\omega} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

3.20. Решение. Законы сохранения энергии при колебаниях осцилляторов в задачах **3.16–3.19** имеют вид

а) для математического маятника

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgl(1 - \cos \alpha) = \text{const}, \quad x = l\alpha;$$

б) для физического маятника

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + mgl(1 - \cos \alpha) = \text{const}, \quad \omega = \dot{\alpha}.$$

В обоих случаях потенциальная энергия маятника при отклонении от положения равновесия на угол α равна $E_{\text{п}} = mgl(1 - \cos \alpha)$, или, при малых α , $E_{\text{п}} \simeq \frac{mgl}{2}\alpha^2$.

Для пружинного маятника $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$, где $\frac{kx^2}{2}$ — потенциальная энергия упругой деформации.

Для электрического колебательного контура: $E = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}$, $I = \dot{q}$, где $W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}$ и $W_{\text{е}} = \frac{q^2}{2C}$ — соответственно магнитная энергия катушки и электрическая энергия конденсатора. Для электрона в атоме Томпсона (принимая потенциал центра облака за ноль):

$$E_{\text{п}} = - \int_0^r F(r) dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2,$$

(см. зад. **3.19**). Во всех случаях потенциальная энергия квадратично зависит от переменных α, x, q, r . Во всех случаях к уравнению гармонического осциллятора приходим, используя постоянство полной энергии, т.е. равенство: $dE/dt = 0$.

3.21. Уравнение колебаний имеет вид $m\ddot{x} + kx = 0$, где $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ в системе а, и $k = k_1 + k_2$ в системе б.

3.22. Силу, действующую на камень, находящийся в тоннеле на расстоянии r от центра Земли, найдите, используя теорему Гаусса для поля тяготения. Уравнение колебаний имеет вид $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$, где $\omega = \sqrt{g/R}$. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ (g — ускорение свободного падения на поверхности Земли).

3.23. Уравнение колебаний имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_n}}$ — частота колебаний, $m_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса.

3.24. Частоты колебаний пропорциональны $\frac{1}{\sqrt{m}}$, где m — приведенная масса (см. зад. 3.23). Для молекул H_2 и H_D имеем соответственно $m_n = \frac{m_p}{2}$, $m_n = \frac{2}{3}m_p$ (m_p — масса протона), поэтому отношение частот равно $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3.25. Механическая модель молекулы CO_2 показана на рисунке. Учитывая различие в приведенных массах при колебаниях типа а и б, получим $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{3}{11}}$.

3.26. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_n}{k}}$, где m_n — приведенная масса.

3.27. Уравнение колебаний имеет вид $\ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0$, где x — смещение поверхности жидкости в трубке относительно равновесного положения. Период колебаний: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

3.28. Ток в катушке в стационарном режиме $I = \mathcal{E}/r$. Максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях после размыкания ключа находим из закона сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{CU_{\max}^2}{2}.$$

Используя затем условия $U_{\max} = n\mathcal{E}$ и $T = 2\pi\sqrt{LC}$, получаем

$$L = \frac{nTr}{2\pi}, \quad C = \frac{T}{2\pi nr}.$$

3.29. Используя второй закон Ньютона, получаем уравнение $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где $\delta = \gamma/(2m)$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота. Решение этого уравнения при $\delta < \omega_0$ имеет вид $x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, где A и φ — произвольные постоянные (они находятся из начальных условий — условий возбуждения колебаний). При $\delta > \omega_0$ решение уравнения имеет вид $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 — корни алгебраического уравнения: $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$ (оно называется характеристическим, при $\delta > \omega_0$ эти корни действительные). Это — экспоненциально затухающее решение. Максимальные отклонения при колебаниях $x(t)$ и $x(t+T)$ связаны равенством $\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\delta T}$.

Соответственно, отношение энергий есть

$$\frac{W(t)}{W(t+T)} = e^{2\delta T}.$$

Относительные потери энергии (при малом затухании) равны

$$\frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} \simeq 2\delta T = 2\pi \frac{\gamma}{\sqrt{mk}}.$$

3.30. Решение. Уравнение колебаний имеет вид $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$, $\delta = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Если $\delta < \omega_0$ (т.е. $R < 2\sqrt{L/C}$), то его решение при заданных начальных условиях есть

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(при $t = 0$ имеем $q = q_0$, $I = \dot{q} = 0$). Потери энергии за период колебания равны

$$\frac{\Delta W}{W} \simeq 2\delta T = 2\pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Если $\delta > \omega_0$ (т.е. $R > 2\sqrt{L/C}$), то решение, удовлетворяющее начальным условиям, есть

$$q(t) = q_0 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right], \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

3.31. Для колебательного контура: $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$. Для пружинного маятника: $Q = \sqrt{mk}/\gamma$.

3.32. Добротность можно оценить по числу колебаний N , в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Из графика на рисунке следует $N \simeq 5$, и, следовательно, $Q = \pi N \simeq 15$.

3.35. Фазовые траектории при $\delta < \omega_0$ и при $\delta > \omega_0$ показаны на рис. 3.9'. Шаг спирали ΔS связан с логарифмическим декрементом затухания равенством

$$\Delta S = S_n - S_{n-1} = A - Ae^{-\delta T} = A(1 - e^{-\delta T}) \simeq A\delta T.$$

3.36. Уравнения колебаний имеют вид:

а) для пружинного маятника

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g, \quad \omega = \sqrt{k/m};$$

б) для колебательного контура

$$\ddot{V} + \omega^2 V = \omega^2 \mathcal{E}, \quad \omega = 1/\sqrt{LC}.$$

Соответственно процесс колебаний есть:

$$\text{а) } x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos \omega t); \quad \text{б) } V(t) = \mathcal{E}(1 - \cos \omega t).$$

Отсюда находим максимальное напряжение на конденсаторе $V_{\max} = 2\mathcal{E}$ и максимальную деформацию пружины $x_{\max} = 2mg/k$.

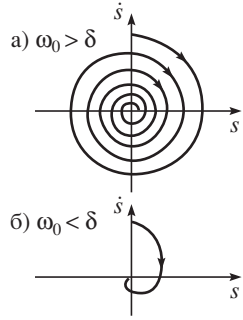


Рис. 3.9'

3. Вынужденные колебания. Спектральный анализ линейных систем. Параметрические колебания

3.37. а) $T_1 = n2\pi\sqrt{LC}$; б) $T_2 = (2n+1)\pi\sqrt{LC}$. При этом амплитуда колебаний $V_{\max} = 2U_0$. Соответствующие графики показаны на рис. 3.10'.

3.38. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \xi_0 \cos \omega t$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты (резонансная характеристика):

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \xi_0.$$

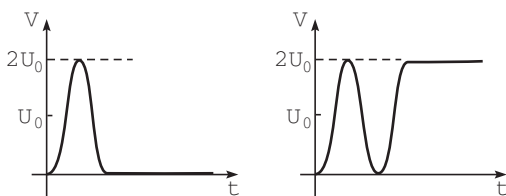


Рис. 3.10'

При $\omega < \omega_0$, колебания синфазны с колебаниями внешней силы, а при $\omega > \omega_0$ колебания происходят в противофазе с колебаниями внешней силы.

3.39. Используйте второй закон Кирхгофа в примерах а и б и второй закон Ньютона — в примере с.

3.40. Решение. Частотная характеристика описывает отклик линейной системы на гармоническое внешнее воздействие, записанное в комплексной форме $e^{i\omega t}$. При этом отклик $S(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$ также является гармоническим колебанием, где $H(\omega)$ — искомая частотная характеристика. Подставляя последнее выражение для $S(t)$ в уравнение $\dot{S} + \frac{1}{\tau}S = \frac{1}{\tau}e^{i\omega t}$, описывающее процесс колебаний в рассматриваемых системах (см. зад. 3.39), приходим к алгебраическому уравнению для $H(\omega)$, откуда находим

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau}.$$

3.41. После одиночного толчка изображающая точка на фазовой плоскости смещается из начала координат (состояния покоя) в точку P (см. рисунок), после чего начинается процесс затухающих колебаний, который изображается на фазовой плоскости скручивающейся спиралью (см. зад. 3.35). При толчках, следующих друг за другом через период колебаний, сначала происходит раскачка колебаний (если энергия, сообщаемая осциллятору при толчке, превосходит потери энергии за период колебаний), а затем, когда потери энергии (которые растут с ростом амплитуды колебаний) сравниваются с энергией, сообщаемой осциллятору толчком, колебания устанавливаются — фазовая траектория становится замкнутой.

3.42. Сила тока как функция частоты внешней ЭДС есть:

$$I(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При резонансе ($\omega = 1/\sqrt{LC}$) $I = \mathcal{E}_0/R$ и не зависит от C , поэтому сила тока остается без изменений. Резонансная частота возрастает в $\sqrt{2}$ раз.

3.43. Указание. Преобразуйте стандартную формулу для амплитуды силы тока в контуре:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

подставив в нее $I_0 = \mathcal{E}_0/R$, $\omega = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ и частоту внешней силы $\omega = 2\pi(f_0 + \Delta f)$. Пренебрегая квадратами и более высокими степенями отношения $\Delta f/f_0$ (это отношение мало для осциллятора высокой добротности), получите требуемый результат.

3.44. При расстройке $\Delta\omega = 1/\tau$ амплитуда колебаний тока I_0 и амплитуда колебаний напряжения $U_0 = I_0 R$ спадают в $\sqrt{2}$ раз, поэтому потребляемая мощность $N \sim I_0 U_0$ спадает в два раза. Итак, $\Delta\omega_1 = 1/\tau$. Используя выражение для фазовой характеристики:

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

можно получить $\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2}$. Если $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $\Delta\varphi = \varphi(\omega_0) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, то $\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1$, откуда $2\delta(\omega_0 + \Delta\omega) = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$; и если $\Delta\omega \ll \omega_0$, то $2\delta\omega_0 \simeq 2\omega_0 \Delta\omega$, т.е. $\Delta\omega_2 = \delta = \frac{1}{\tau}$.

3.45. Энергия уменьшится в два раза, $\tau = \frac{1}{\Delta\omega} \simeq 1,16$ с (см. решение зад. 3.44).

3.46. Из выражения для резонансной характеристики осциллятора:

$$\left(\frac{U}{\mathcal{E}_0}\right) = \frac{Q^2}{Q^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

следует, что при $\omega = \omega_0$ $U = Q\mathcal{E}_0$, при $\omega \ll \omega_0$ $U \simeq \mathcal{E}_0$, а при $\omega \gg \omega_0$ $U \simeq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \mathcal{E}_0$, откуда следует

$$U \simeq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 U_0 \simeq 0,01 \text{ В.}$$

3.47. Очевидно, контур должен быть настроен на частоту станции B , т.е. $\omega_0 = \omega_B$. И при этом частота ω_A станции A должна лежать вне полосы резонансной кривой контура. Оба эти условия дают $U_B \simeq Q\mathcal{E}_B$, $U_A = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \mathcal{E}_A$ (см. решение зад. 3.47), откуда получаем:

$$Q \geq \left(\frac{U_B}{U_A}\right) \left(\frac{E_A}{E_B}\right) \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2 \simeq 50.$$

3.48. Можно. Амплитуда колебаний максимальна при $\Omega = |\omega_0 - \omega|$ (это — электрический аналог опыта Мандельштама).

3.49. Частотные характеристики фильтров:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}, \quad H_2(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}.$$

$g \simeq f(t)$, если $\omega_{\max} \ll \frac{1}{RC}$; $g \simeq f(t)$, $\omega_{\min} \gg \frac{1}{RC}$.

3.50. Решение. Внешнюю ЭДС можно представить в виде суммы гармонических колебаний

$$\mathcal{E}(t) = \left(1 + \frac{m}{2}\right) A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{4} \cos[(\omega_0 + 2\Omega)t] + \frac{mA}{4} \cos[(\omega_0 - 2\Omega)t].$$

а) При настройке контура на частоту ω_0 имеем $A_1 = Q_1 \left(1 + \frac{m}{2}\right) A$.

б) При настройке на частоту $\omega_0 + 2\Omega$ получаем $A_2 = Q_2 \frac{mA}{4}$, где

$$Q_1 = \frac{\omega_0}{2\delta}, \quad Q_2 = \frac{\omega_0 + 2\Omega}{2\delta}.$$

3.51. Резонанс наступает на частотах ω_0 и $\omega_{\pm 2\Omega}$, (см. решение зад. 3.50). На частоте $\omega + 2\Omega + \delta$ амплитуда равна $A_2 = \frac{(\omega_0 + 2\Omega)}{2\delta} \frac{mA}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Из условия $\frac{A_1}{A_2} = n = 4$ находим $m = \frac{2\sqrt{2}}{n} = 0,7$.

3.52. Решение. Переменная ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$ является суммой постоянной ЭДС $\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2}$ и гармонической ЭДС частоты 2Ω : $\mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \cos 2\Omega t$. Сопротивление участка цепи, содержащей конденсатор, для постоянной составляющей $\mathcal{E}_1$ бесконечно велико (разрыв цепи), поэтому постоянный ток течет через участок цепи $R_1, L_1, I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2(R_1 + R_2)}$. Переменная составляющая тока течет через участок цепи LC , поскольку сопротивление этого участка $Z = (2\Omega)L - \frac{1}{(2\Omega)C}$ для частоты 2Ω равно нулю. Поэтому

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{2R_1} \cos 2\Omega t.$$

3.53. $V_{\text{вых}} = V_0 [1 + m_1 \cos(\Omega t + \varphi)] \cos \omega_0 t$, где $m_1 = \frac{m}{\sqrt{1 + Q^2 \frac{4\Omega^2}{\omega_0^2}}}$.

3.54. Решение. Воспользуемся спектральным разложением периодической последовательности прямоугольных импульсов

$$a_n = \frac{2\tau}{T} \left(\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \right),$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$, T — период следования импульсов, τ — длительность импульсов ($T = 4\tau$), откуда следует $a_1/a_2 = \sqrt{2}$.

Амплитуды первой и второй гармоники выходного сигнала есть соответственно

$$V_1 = Qa_1, \quad V_2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^2 a_2$$

(поскольку частота второй гармоники $\omega_2 \gg \omega_1 + \delta$, см. решение зад. 3.46). Окончательно

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^2 \frac{1}{Q} \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{Q}.$$

3.55. Решение. Как ясно из графика, $T = 2\pi\sqrt{L_0 C} = 4\tau$, откуда $C = \frac{4\tau^2}{\pi^2 L_0} = 10^{-9}$ Ф. Условие параметрической раскачки колебаний — превышение подводимой энергии над потерями — имеет вид

$$\frac{\Delta L}{L_0} \geq \frac{RT}{2L_0} = \frac{\pi}{Q},$$

где T — период колебаний, откуда $R_{\text{max}} = \frac{\Delta L}{4\tau_0} = 10$ Ом.

3.56. Емкость конденсатора нужно уменьшать на величину ΔC в моменты, когда напряжение на конденсаторе максимально. При этом энергия возрастает на величину

$$\Delta W = \Delta \left(\frac{q^2}{2C} \right) = -\frac{1}{2} U_m^2 \Delta C \quad (\text{при } \Delta C < 0, \Delta W > 0).$$

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC} = 4 \cdot 10^{-6}$ с.

Потери энергии за период $\Delta W_n = \frac{I_m^2 R}{2} T$.

Поскольку $I_m = q_m \omega$, то $\Delta W_n = \pi^2 C^2 U_m^2 R \omega$.

Для поддержания незатухающих колебаний необходимо, чтобы $\Delta W \geq \Delta W_n$, откуда $|\Delta C| \geq 2\pi C^2 R \omega$.

4. Волны. Волновое уравнение. Кинематика волн

3.60. Уравнение гармонической волны $E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r}))$. Комплексная амплитуда волны $f(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ есть комплексная функция координат, определяющая как амплитуду гармонических колебаний в каждой точке пространства $\mathbf{r}(x, y, z)$, так и начальную фазу.

3.61. Уравнение плоской монохроматической волны:

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi_0).$$

Уравнение сферической волны:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi_0), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Соответственно, их комплексные амплитуды:

$$f(\mathbf{r}) = a_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0)}, \quad f(r) = \frac{a_0}{r} e^{i(kr + \varphi_0)}.$$

3.62. Уравнение плоской волны

$$E(x, z, t) = a_0 \cos[\omega t - k_x x - k_z z].$$

Фаза колебаний в точках P_1 и P_2 есть соответственно:

$$\varphi_1 = kx_1 \sin \alpha + kz_1 \cos \alpha, \quad \varphi_2 = kx_2 \sin \alpha + kz_2 \cos \alpha.$$

Разность фаз $\Delta \varphi = k(x_1 - x_2) \sin \alpha + k(z_1 - z_2) \cos \alpha$, т.е. колебания противофазны.

Уравнение волновых поверхностей $kx \sin \alpha + kz \cos \alpha = \text{const}$ или $x + \sqrt{3}z = \text{const}$.

3.63. Решение. Условие синфазности колебаний в точках P_1 и P_2 есть

$$\frac{2\pi}{\lambda} [(x_2 - x_1) \sin \alpha + (z_2 - z_1) \cos \alpha] = 2\pi m,$$

откуда $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = m\lambda$ или $\sin(\alpha - \beta) = m \frac{\lambda}{l} = \frac{m}{2}$, где β — угол между осью z и прямой, соединяющей точки P_1 и P_2 , расстояние между которыми $l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} = 2 \left(\sin \beta = \frac{\Delta x}{l} = \frac{1}{2} \right)$. Получаем $\alpha = \frac{\pi}{6} + \arcsin \left(\frac{m}{2} \right)$.

Окончательно находим

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, +\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{6}.$$

3.64. Суперпозиция бегущих навстречу друг другу волн

$$S_1(z, t) = a \cos(\omega t - kz) \quad \text{и} \quad S_2(z, t) = a \cos(\omega t + kz)$$

есть $S(z, t) = S_1 + S_2 = 2a \cos kz \cos \omega t$.

Расстояние между узлами (и между пучностями) равно $\Delta z = \pi/k = \lambda/2$.

Разность фаз колебаний в соседних пучностях равна π .

3.66. Волна поперечна. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ волна линейно поляризована. При $\varphi = 0$ плоскость колебаний лежит в первом и третьем квадрантах, при $\varphi = \pi$ — во втором и четвертом квадрантах. Поляризация круговая при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вектор $\mathbf{S}$ вращается по часовой стрелке (если смотреть навстречу волне), при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ вектор $\mathbf{S}$ вращается против часовой стрелки.

5. Упругие волны

3.68. Если $\xi(z, t) = f(z - vt)$ — волна смещения частиц упругой среды (волна бежит в положительном направлении оси z), то волна скоростей имеет вид $u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -vf'(z - vt)$, а волна деформаций: $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial z} = f'(z - vt)$ (штрих означает дифференцирование по аргументу $z - vt$). Соответствующие графики $u(z)$ и $\varepsilon(z)$ (мгновенные фотографии) показаны на рис. 3.11' (функции $u(z)$ и $\varepsilon(z)$ пропорциональны производной по z функции $f(z - vt)$ при фиксированном $t = t_0$).

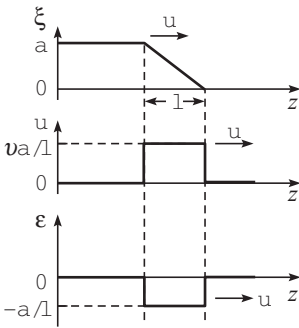


Рис. 3.11'

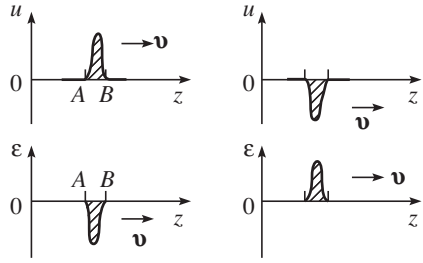


Рис. 3.12'

3.69. Графики $u(z)$ и $\varepsilon(z)$ показаны на рисунках 3.12' а и б.

3.71. Волны напряжений и скоростей есть соответственно:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial z} = EkA \sin(\omega t - kz), \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz),$$

поэтому плотность потока энергии $q = -\sigma u$ равна

$$q = Ek\omega A^2 \sin^2(\omega t - kz).$$

Средний за период колебаний поток энергии

$$\bar{q} = \frac{1}{2} Ek\omega A^2.$$

3.72. Решение. Стоячая волна смещений $\xi(z, t)$ (сумма бегущих навстречу друг другу волн $A \cos(\omega t - kz)$ и $A \cos(\omega t + kz)$) имеет вид

$$\xi(z, t) = 2A \cos kz \cos \omega t.$$

Тогда волны скоростей и напряжений есть соответственно:

$$u(z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega A \cos kz \sin \omega t, \quad \sigma(z, t) = -2EkA \sin kz \cos \omega t.$$

Отсюда поток энергии $q = -\sigma u$ равен

$$q = -E\omega k A^2 \sin 2kz \sin 2\omega t.$$

Расстояние между сечениями, поток энергии через которые равен нулю: $z_0 = \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4}$. Например, поток энергии равен нулю через сечение $z = 0$ и сечение $z = z_0$.

Плотность упругой энергии

$$w = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}E\epsilon^2 = 2A^2(\rho\omega^2 + Ek^2) \cos^2 kz \sin^2 kz,$$

а полная энергия упругой волны между этими двумя единичными сечениями равна

$$W = \int_0^{z_0} w(z) dz = 2\rho\omega^2 A^2 \left[\int_0^{z_0} \cos^2 kz dz \right] \sin^2 \omega t + 2Ek^2 A^2 \left[\int_0^{z_0} \sin^2 kz dz \right] \cos^2 \omega t.$$

$$\text{Или } W = \frac{\pi A^2}{2} \left[\rho \frac{\omega^2}{k} \sin^2 \omega t + Ek \cos^2 \omega t \right].$$

Так как $\frac{\rho\omega^2}{k} = Ek = \omega \sqrt{E\rho}$, то окончательно находим

$$W = \frac{\pi A^2}{2} \omega \sqrt{E\rho}.$$

Как и следовало ожидать, энергия в этом участке стержня остается постоянной, неизменной во времени величиной, и лишь преобразуется из одного вида в другой. Первое слагаемое

$$W = \frac{\pi A^2}{2} Ek \sin^2 \omega t$$

описывает закон изменения во времени кинетической энергии, а второе

$$W = \frac{\pi A^2}{2} Ek \cos^2 \omega t$$

— закон изменения во времени потенциальной упругой энергии.

3.73. Возможные типы стоячих волн в стержне с закрепленными концами удовлетворяют граничным условиям $\xi(0, t) = \xi(L, t) = 0$ и имеют вид

$$\xi_n(z, t) = 2a \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin \omega_n t, \quad \text{где } \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3.74. Энергии возможных типов колебаний (см. решение зад. 3.73) $W_n = a^2 \omega_n^2 V$, где V — объем стержня. Наинизшую энергию имеет тип колебаний

$$n = 1; \quad W_1 = a^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{\rho} V.$$

3.75. $\nu_1 = v/(2L) = 16 \text{ Гц}$.

3.76. Скорость распространения волн в струне $v = \sqrt{\sigma/\rho}$. Частоты собственных типов колебаний

$$\nu_n = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

3.77. Частота первой гармоники

$$\nu_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

где σ — сила натяжения, отнесенная к единице площади, ρ — плотность материала, $\mu = \rho S$ — линейная плотность. Получаем

$$F = 4L^2 \nu_1^2 \mu = 144 \text{ Н}.$$

3.79. Решение. Пусть падающая на границу раздела двух сред волна смещений (она распространяется в первой среде) имеет вид

$$\xi_1(z, t) = a_1 \cos(\omega t - k_1 z).$$

Соответственно, отраженная волна $\xi'_1(z, t)$ и прошедшая во вторую среду волна $\xi_2(z, t)$:

$$\xi'_1(z, t) = a'_1 \cos(\omega t + k_1 z), \quad \xi_2(z, t) = a_2 \cos(\omega t - k_2 z).$$

На границе $z = 0$ должны выполняться следующие условия: $\xi_1(0, t) + \xi'_1(0, t) = \xi_2(0, t)$ (одно и то же смещение границы $z = 0$ выражается как через волновое возмущение в первой среде, так и через волновое возмущение во второй среде).

Кроме того, упругая сила (на единицу площади), действующая со стороны первой среды на вторую, равна по величине силе, действующей на первую среду со стороны второй: $\sigma_1(0, t) + \sigma'_1(0, t) = \sigma_2(0, t)$.

Оба эти граничные условия дают

$$R = \left(\frac{a'_1}{a_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2, \quad T = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \left(\frac{4\gamma}{1 + \gamma} \right)^2,$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}}$. Коэффициенты отражения R и прозрачности T связывают средние за период потоки энергии в отраженной и прошедшей волнах с потоком энергии в падающей волне.

3.80. Из выражений для коэффициентов отражения и прозрачности (см. решение зад. 3.79) следует

$$R + T = \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 + \left(\frac{4\gamma}{1 + \gamma} \right)^2 = 1.$$

3.81. Решение. Из выражений для коэффициентов отражения и прозрачности (см. зад. 3.79) следует, что при $\gamma = 1$ ($E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2$) $R = 0$, $T = 1$, т.е. волна полностью проходит во вторую среду (нет отражения). При $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ нет прошедшей волны, т.е. волна полностью отражается $R = 1$, $T = 0$.

3.82. Решение. Действительно, при замене γ на $1/\gamma$ (т.е. при замене местами первой и второй среды) величины R и T не изменяются:

$$R = \left(\frac{1 - 1/\gamma}{1 + 1/\gamma} \right)^2 = \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2, \quad T = \left(\frac{41/\gamma}{1 + 1/\gamma} \right)^2 = \left(\frac{4\gamma}{1 + \gamma} \right)^2.$$

3.83. Решение. При $\gamma = \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}} < 1$ (первая среда плотнее и (или) жестче, чем вторая) амплитудный коэффициент отражения

$$r = \left(\frac{a'_1}{a_1} \right) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} > 0,$$

что означает синфазность колебаний в отраженной и падающей волнах. При $\gamma > 1$ амплитудный коэффициент отражения отрицателен (амплитуды a'_1 и a_1 имеют разные знаки), что означает противофазность колебаний в отраженной и падающей волнах.

3.84. Решение. Из выражения для амплитудного коэффициента отражения:

$$r = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$$

следует, что при $\gamma = 0$ $a'_1 = a_1$ — колебания смещений в падающей и отраженной волнах синфазны на границе раздела и стоячая волна смещений: $\xi(z, t) = 2a \cos kz \cos \omega t$ имеет пучность на границе $z = 0$, при этом стоячая волна напряжений (давлений): $P = -\sigma = -E \frac{\partial \xi}{\partial z} = 2akE \sin kz \cos \omega t$ имеет на границе узел.

При $\gamma = \infty$ $a'_1 = -a_1$ — колебания смещений в падающей и отраженной волнах противофазны, поэтому стоячая волна смещений: $\xi(z, t) = 2a \sin kz \cos \omega t$ имеет в этом случае узел на границе, при этом стоячая волна напряжений (давлений):

$P = -\sigma = -E \frac{\partial \xi}{\partial z} = 2akE \cos kz \cos \omega t$ имеет на границе пучность.

3.85. Решение. При падении волны, бегущей в воздухе, на поверхность воды

$$\gamma = \sqrt{\rho_2 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_2 / \rho_1 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_1} \gg 1$$

велико, коэффициент отражения близок к единице, однако колебания смещений в падающей и отраженной волнах противофазны (см. решение зад. 3.84) и на поверхности воды имеем узел смещений и пучность давлений. Поэтому амплитуда колебаний давления в волне, прошедшей в воду, почти вдвое больше амплитуды давления в волне, падающей на поверхность. Если же звуковая волна, бегущая в воде (излучаемая говорящими рыбами), падает на границу с воздухом, то $r \simeq 1 > 0$ — на границе возникает узел давления (точнее, амплитуда колебаний давления, равная разности амплитуд в падающей и отраженной волнах, очень мала — много меньше амплитуды колебаний давления в падающей на границу раздела волне). Столь же малую величину имеет и амплитуда колебаний давления в волне, прошедшей в воздух.

6. Электромагнитные волны

3.86. Связь между полями E и B имеет вид $E = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} B$.

3.87. Волна бежит слева направо, т.е. в положительном направлении оси z . При изменении направления полей либо $\mathbf{E}$, либо $\mathbf{B}$, направление распространения волны изменится на противоположное.

3.88. $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$.

3.89. Результат суперпозиции E двух волн E_1 и E_2 с близкими частотами ω и $\omega + \Omega$, бегущих в одном направлении, есть

$$E = a_0 \cos(\omega t - kz) + a_0 \cos[(\omega + \Omega)t - kz] = 2a_0 \cos \frac{\Omega t}{2} \cos \left[\left(\omega + \frac{\Omega}{2} \right) t - kz \right],$$

$$B = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} E = 2a_0 \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \cos \frac{\Omega t}{2} \cos \left[\left(\omega + \frac{\Omega}{2} \right) t - kz \right].$$

Объемная плотность энергии колебаний равна

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu \mu_0} = 4\varepsilon \varepsilon_0 a^2 \cos^2 \frac{\Omega t}{2} \cos^2 \left[\left(\omega + \frac{\Omega}{2} \right) t - kz \right],$$

а средняя за период величина w : $\overline{w} = 2\varepsilon \varepsilon_0 a^2 \cos^2 \frac{\Omega t}{2}$ одинакова при всех z .

3.92. Результат суперпозиции — стоячая волна: $E = 2a \cos kz \cos \omega t$, $B = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} a \sin kz \sin \omega t$.

Амплитуды колебаний полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$: $E_0(z) = 2a \cos kz$, $B_0 = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} a \sin kz$.

Фазовый сдвиг равен $\pi/2$. Расстояние между ближайшими узлами равно $\lambda/4$.

3.93. Результат отражения — стоячая волна с узлом электрического поля и пучностью магнитного поля на поверхности проводника ($z = 0$): $E(z, t) = 2a \sin kz \sin \omega t$, $B(z, t) = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} a \cos kz \cos \omega t$.

3.94. Возможные типы волн $E_x(y, z, t) = 2a \sin \left(n\pi \frac{y}{d} \right) \sin(\omega t - k_z z)$, где $k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - n^2 \left(\frac{\pi}{d} \right)^2}$.

Соответствующие распределения амплитуд колебаний: $A_n(y) = 2a \sin \left(n\pi \frac{y}{d} \right)$.

Фазовая скорость волн

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2 \left(\frac{\lambda_0}{2d} \right)^2}}, \quad \text{где } \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Длины волн

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - n^2 \left(\frac{\lambda_0}{2d} \right)^2}},$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве. Критическая частота $\omega_{\text{кр}} = \pi \frac{c}{d}$, где d — расстояние между стенками волновода, параллельными полю E_x . Электромагнитные волны в волноводе не являются поперечными.

3.95. $\rho = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$. Для воды $\rho = 2$, для стекла $\rho = 4$.

Указание. Используйте граничные условия — равенство тангенциальных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ по обе стороны от границы раздела.

3.96. $\sigma = \frac{4n}{(n+1)^2} = 0,96$.

3.97. Указание. Следует учесть, что поперечные сечения l_1 и l_2 падающего и преломленного пучков света связаны соотношением: $\frac{l_1}{\cos \alpha} = \frac{l_2}{\cos \beta}$, где α и β соответственно угол падения и отражения.

3.98. Угол полной поляризации отраженного света φ_B (угол Брюстера) определяется формулой $\operatorname{tg} \varphi_B = n$, степень поляризации преломленного света

$$\Delta = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p} = \frac{4n^2 - (1 + n^2)^2}{4n^2 + (1 + n^2)^2} = -0,08,$$

где I_s и I_p — соответственно интенсивности компонент электрического поля, параллельного и перпендикулярного плоскости падения.

3.99. Из выражения для амплитудного коэффициента отражения: $r = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ следует, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ (т.е. $n = \frac{n_1}{n_2} > 1$) $r < 0$ — фаза колебаний меняется на π , а при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (т.е. $n_1 > n_2$) $r > 0$ — фаза не меняется.

3.100. Указание. Граничные условия для нормальных и тангенциальных компонент поля $\mathbf{E}$ определяются из соответствующих уравнений Максвелла (теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции).

7. Интерференция волн. Когерентность

3.101. Решение. Максимумы интенсивности соответствуют синфазному сложению волн, одна из которых падает на детектор непосредственно, а вторая — после отражения от поверхности воды. При этом следует учесть, что в случае, когда вектор $\mathbf{E}$ в падающей волне перпендикулярен плоскости падения (так называемая горизонтальная поляризация), отражение происходит с изменением фазы на π , что соответствует изменению разности хода на $\lambda/2$. В этом случае условие максимума имеет вид $2h \sin \alpha = m\lambda + \lambda/2$ ($m = 0, 1, \dots$), откуда $\alpha_1 = \lambda/4h$. В случае, когда вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения, изменения фазы при отражении не происходит (так как в этом случае требуемое граничное условие — равенство нулю тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{E}$ на поверхности проводника — автоматически выполняется). При этом условие максимума имеет вид $2h \sin \alpha = m\lambda_1$, откуда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \lambda/2h = 2^\circ 40'$.

3.102. Решение. Для малой излучающей площадки $d\psi$, имеющей угол возвышения ψ (так же, как для точечного излучателя), интенсивность принимаемого сигнала равна $dI = 2Id\psi \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} h \cos \psi \right) \right]$, где $2 \frac{2\pi}{\lambda} h \cos \psi$ — разность фаз интерферирующих волн, I — интенсивность волны, приходящей с площадки единичного углового размера. Интегрируя последнее равенство по ψ в пределах от $\alpha - \psi/2$, до $\alpha + \psi/2$ (ψ — угловой размер источника) и полагая ψ малым, получим

$$I = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \left[2\pi\psi \left(\frac{h}{\lambda} \right) \right]}{2\pi\psi \left(\frac{h}{\lambda} \right)} \cdot \cos \left(\frac{4\pi h \alpha}{\lambda} \right) \right]$$

где I_0 — интенсивность принимаемого сигнала в отсутствие отражения от поверхности воды. При $\psi \geq \frac{\lambda}{2h}$ множитель $\frac{\sin [2\pi\psi (h/\lambda)]}{2\pi\psi (h/\lambda)}$ становится малым. Интенсивность в этом случае $\simeq 2I_0$ и не зависит от угла возвышения α .

3.103. $U_0 \sim 1 + \cos\left(\frac{2\pi L \sin \alpha}{\lambda}\right)$, где $\alpha = \omega_3 t$, ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

3.104. Колебания некогерентны — интенсивность суммарного колебания равна сумме интенсивностей слагаемых колебаний: $I = 3I_0$.

3.105. Решение. Уравнения слагаемых плоских волн имеют вид

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - k \sin \alpha \cdot x), E_2 = E_0 \cos(\omega t + k \sin \alpha \cdot x).$$

Интенсивность суммарного колебания в любой точке фиксированной плоскости наблюдения $z = \text{const}$ есть $I = 2I_0[1 + \cos(2k \sin \alpha \cdot x)]$. Расстояние между соседними максимумами находим из условия $2k \sin \alpha \cdot \Delta x = 2\pi$. Откуда

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = \frac{\lambda}{\sin \varphi/2}.$$

При малых φ получим $\Delta x \simeq \lambda/\varphi$.

3.106. $\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi \cos \theta}$, где θ — угол между нормалью к плоскости наблюдения и биссектрисой угла между интерферирующими пучками.

$$\mathbf{3.107.} \lambda = \frac{xd}{a} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 5000 \text{ \AA}.$$

3.108. Указание. На призму (после линзы) падает параллельный пучок света, угол преломления которого призмой (с малым преломляющим углом α) равен $\varphi = (n-1)\alpha$, поэтому угол схождения интерферирующих волн равен 2φ . Получаем (см. зад. **3.105**):

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0,05 \text{ мм} \quad N = \frac{4L(n-1)^2\alpha^2}{\lambda} = 10.$$

3.109. Максимальное число полос $N = (n-1)\frac{\alpha}{\lambda}$ получается при удалении экрана на $L_0 = \frac{l}{4(n-1)\alpha} = 20 \text{ м}$ от бипризмы. Полосы исчезнут при удалении на $L \geq 2L_0$

3.110. Амплитуда излучателя 3 должна быть в $\sqrt{2}$ раз больше амплитуд излучателей 1 и 2. Минимумы нулевой интенсивности направлены под углами $\theta = \pm 60^\circ$ к линии, соединяющей источники.

3.111. Воспользуемся условием $m(\lambda + \delta\lambda) = (m+1)\lambda$ (m -й максимум интенсивности для линии $\lambda + \delta\lambda$ совпадает с $(m+1)$ -м максимумом для линии λ), откуда

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{5893 \text{ \AA}}{980} \simeq 6 \text{ \AA}$$

3.112. Расстояние d между щелями должно быть меньше радиуса когерентности $\rho = \lambda/\alpha$, $d < \lambda/\alpha \simeq 0,05 \text{ мм}$.

3.113. $L > fd\alpha/\lambda \simeq 100 \text{ см}$ (см. решение задачи **3.112**).

3.114. $b \leq 2d_1^2/d_2 = 0,1 \text{ см}$.

Указание. Расстояние d_2 должно быть меньше радиуса когерентности $d_2 \leq (\lambda/b)L$. Длина волны находится из условия $2\sqrt{L^2 + d_1^2} - 2L = \lambda/2$ (условие минимума при $d = d_1$), откуда $d_1/L \simeq \lambda/2$.

3.115. Решение. Полоса пропускания спектрального прибора $\Delta\lambda$ должна быть достаточно малой, чтобы для выделенного спектрального интервала разность

хода Δ была меньше длины когерентности $\Delta \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, откуда

$$\Delta\lambda \leq \frac{\lambda^2}{\Delta}, \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \geq \frac{\Delta}{\lambda} \simeq 5 \cdot 10^8.$$

3.116. Решение. Используется спектроскоп, разрешающая способность которого не меньше величины $R = \Delta/\lambda$ (см. зад. 3.115). При перестройке спектроскопа с линии λ ($\Delta = (m+1)\lambda$) на линию $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta = m(\lambda + \Delta\lambda)$) получаем $(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$, откуда $m = \lambda/\Delta\lambda$ и окончательно

$$\Delta\lambda \simeq m\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{c}{\Delta\nu} = 30 \text{ нм}.$$

3.117. $\Delta\lambda = \lambda/m$, где m — максимальный порядок интерференции. Как видно из графика, $m \simeq 5$. Апертура интерференции определяется видностью нулевой полосы

$$\Omega = \frac{0,5\lambda}{b} \simeq 10^{-3} \text{ рад}.$$

3.118. Решение. Из графика определяется видность нулевой полосы:

$$V = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi\Omega}{\lambda/b}\right)}{\left(\frac{\pi\Omega}{\lambda/b}\right)} \right| \simeq \frac{3,3 - 0,7}{3,3 + 0,7} = 0,65 \simeq \frac{2}{\pi},$$

откуда $x = \frac{\pi\Omega}{\lambda/b} = \frac{\pi}{2}$ и $b = \frac{\lambda}{2\Omega} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Немонохроматичность определяется

максимально различимым порядком интерференции $m \simeq 10$ и $\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda}{m} \simeq 50$ нм.

3.119.

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{\sin(\pi bd/\lambda L)}{(\pi bd/\lambda L)} \right|.$$

3.120.

$$V = \left| \frac{\sin\left[\pi \frac{\Delta f}{c} \Delta\right]}{\pi \frac{\Delta f}{c} \Delta} \right|,$$

где Δ — разность хода.

3.121. При расстоянии между внешними зеркалами M_1 и M_2 , равном радиусу когерентности $D = \lambda/\psi$ (ψ — угловой размер источника), полосы исчезают, откуда $\psi = \lambda/D = 0,0047''$

3.122. Решение. Направление α на нулевой максимум (главный лепесток диаграммы направленности) определяется условием: $\varphi - \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \alpha = 0$ (разность фаз волн от двух соседних излучателей в направлении α равная $\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \alpha$, скомпенсирована начальной разностью фаз φ , d — расстояние между соседними вибраторами). При $\alpha = \Omega t$ получаем

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \Omega t.$$

3.124. Решение. Разность хода волн, отраженных от нижней и верхней поверхностей пластинки, равна $\Delta = 2hn \cos \psi$, где ψ — угол преломления, m -й порядок интерференционных полос определяется условием $\Delta = m\lambda$, откуда $m = \frac{2hn \cos \psi}{\lambda}$.

Максимальный угол преломления ψ (и, следовательно, минимальное значение m) отвечает максимальному углу падения на пластинку, равному $\pi/2$. При этом $\sin \psi = \frac{1}{n}$, $\cos \psi = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}$, и мы получаем

$$m_{\min} = \frac{2h\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} \simeq 720, \quad m_{\max} = \frac{2hn}{\lambda} \simeq 1000.$$

Максимально допустимая разность хода $\Delta_{\max}$ связана со степенью монохроматичности условием $\Delta_{\max} \simeq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, откуда $\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda}{m_{\max}} \simeq 1,4$ нм. Апертура интерференции в этом эксперименте равна нулю, поэтому нет серьезных ограничений на размеры источника.

3.125. Решение. При сложении трех плоских волн с комплексными амплитудами 1, a , a ($a \ll 1$) получаем

$$1 \cdot e^{ikz} + ae^{i(k \sin \alpha \cdot x + k \cos \alpha \cdot z)} + ae^{i(-k \sin \alpha \cdot x + k \cos \alpha \cdot z)} = e^{ikz} \left[1 + 2ae^{-i\frac{k\alpha^2}{2}} \cdot \cos(k \sin \alpha \cdot x) \right].$$

Отсюда интенсивность (квадрат модуля комплексной амплитуды) с точностью до членов порядка a равна

$$I \simeq 1 + 4a \cos\left(\frac{k\alpha^2}{2} z\right) \cos(k \sin \alpha x).$$

Максимальный контраст наблюдается в плоскостях $z = \text{const}$, где $\frac{k\alpha^2}{2} z_m = m\pi$, откуда $z_m = \frac{m\lambda}{\alpha^2}$. При этом контраст равен

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 4a.$$

Минимальному (нулевому) контрасту соответствует условие

$$\frac{k\alpha^2}{2} z = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{откуда} \quad z_m = \frac{(m + 1/2)\lambda}{\alpha^2}.$$

8. Дифракция волн. Разрешающая способность спектральных и оптических приборов. Пространственная фильтрация. Голография

3.126. Решение. На спирали Френеля амплитуда колебаний в отсутствие экрана определяется длиной вектора $\mathbf{A}_0$, вклад первой зоны Френеля определяется вектором $\mathbf{A}_1$ (проведенным из начала в конец полувитка), следовательно, вклад всех зон Френеля за исключением первой закрытой зоны изображается вектором $\mathbf{A}$ (см. рис. 3.13'), длина которого равна длине вектора $\mathbf{A}_0$. Соответственно, интенсивность равна интенсивности в отсутствие экрана.

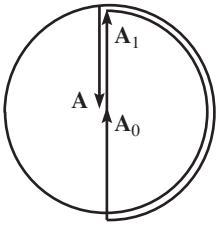


Рис. 3.13'

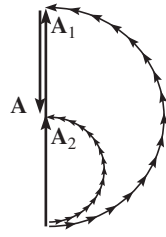


Рис. 3.14'

3.127. Решение. Вклад небольшого нечетного числа зон Френеля изображается на спирали Френеля вектором $\mathbf{A}_1$ (см. рис. 3.14'). Напомним, что каждый элементарный вектор на векторной диаграмме, изображающей спираль, является вкладом вторичных источников, лежащих внутри тоненького колечка, на которые разбит волновой фронт в плоскости препятствия, центр этого колечка лежит на прямой OP . Спираль составлена из этих элементарных векторов. Если половина площади колечка перекрывается непрозрачным экраном, то длина элементарного вектора уменьшается вдвое (вдвое уменьшается число вторичных источников, дающих синфазный вклад в суммарное колебание), при этом направление элементарного вектора остается неизменным. Суммарный вклад всех элементарных векторов, составляющих небольшое нечетное число зон Френеля изображается поэтому вектором того же направления, что и вектор $\mathbf{A}_1$, однако имеющим вдвое меньшую длину: вектор $\mathbf{A}_2$ на рисунке, который совпадает с вектором $\mathbf{A}_0$, изображающим колебание в отсутствие препятствия. Поскольку вклад всех зон, за исключением небольшого нечетного числа зон, изображается вектором $\mathbf{A}$, имеющим ту же длину, что и вектор $\mathbf{A}_0$, но противоположно направленным, то амплитуда суммарного колебания равна нулю и интенсивность равна нулю.

3.128. При четном N прозрачная часть диска вносит дополнительную разность хода, равную $(n - 1)l = m\lambda$ (m — целое число) и дополнительную разность фаз, равную $2\pi m$, т.е. не изменяет фазовые соотношения, поэтому (см. зад. 3.126) $I = 0$. При нечетном N вектор $\mathbf{A}_2$ изменяет направление на противоположное, поэтому $\mathbf{A} = 2\mathbf{A}_2$ и $I = 4I_0$.

3.129. Амплитуда колебаний в точке наблюдения увеличится в $\sqrt{3}$ раз, а интенсивность в 3 раза.

Указание. Вклад $1/3$ части первой зоны Френеля изображается вектором $\mathbf{A}$ (см. рис. 3.15').

$$3.130. h = \frac{3}{8} \lambda.$$

$$3.131. \frac{E}{E_0} \simeq \frac{D^2}{\lambda R} \simeq 10^4.$$

$$3.132. \frac{I}{I_0} \simeq \left(\frac{D^2}{\lambda R} \right)^2 = 1,5 \cdot 10^7, \quad b = \frac{2\lambda F}{D} \simeq 10^{-3} \text{ см.}$$

3.133. Для снятия диаграммы направленности необходимо удалить приемник в зону Фраунгофера.

$$3.134. I(\theta) = \left| \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)} \right|^2 \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{Nkd}{2} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right)} \right|^2.$$

$$3.135. I = I_0 \frac{4R^4}{\lambda^2 f^2}.$$

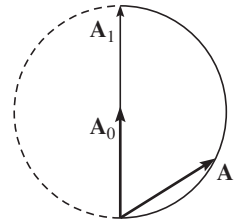


Рис. 3.15'

$$3.136. z_m = \frac{2d^2}{\lambda} m = m \cdot 50 \text{ м } (m = 1, 2, \dots), \text{ (Эффект Талбота).}$$

$$3.137. D \geq 1,22 \frac{\lambda h}{l} = 16,8 \text{ см}; f \geq \frac{h}{Nl} = 50 \text{ см}; \frac{D}{f} = \frac{1}{3}.$$

$$3.138. f \geq 40 \text{ см}; D \geq 10 \text{ см}; \tau \simeq 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

$$3.139. l \geq 1,22 \frac{\lambda L}{D}, \text{ где } L \text{ — расстояние от Земли до Марса. Полагая } \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м, находим } l \geq 28 \text{ км}.$$

$$3.140. r \geq \sqrt{0,01} \frac{\lambda L}{D} \simeq 4 \text{ м, где } L = 4 \cdot 10^3 \text{ км — расстояние до Луны}.$$

$$3.141. \delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,023''.$$

$$3.142. \text{Решение. Мощность излучения, падающего на спутник: } N_1 = N \frac{d^2}{4 \left(\frac{\lambda L}{D}\right)^2},$$

а отраженная мощность $N' = \rho N$. Мощность, падающая на объектив телескопа, принимающего излучение, равна

$$N_2 = N' \frac{\pi(D^2/4)}{2\pi L^2} = \frac{N'}{8} \left(\frac{D}{L}\right)^2.$$

Из условия $N_2 \geq N_{\text{пор}}$ находим

$$L \leq L_{\text{max}} = \frac{D}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho N d^2}{2 N_{\text{пор}} \lambda^2}} \simeq 70 \text{ км}.$$

$$3.143. L \leq \frac{dD}{c} \sqrt{\frac{N\nu}{nh}} \simeq 3,2 \cdot 10^8 \text{ км, где } h \text{ — постоянная Планка}.$$

$$3.144. \text{Освещенность изображения дневного неба (как протяженного источника)} \\ I_{\text{н}} = \frac{\Psi}{S} \sim D^2, \text{ где } \Psi \text{ — световой поток, падающий на объектив, } S \text{ — площадь изображения, не зависящая от диаметра объектива. Освещенность изображения звезды } I \sim D^4, \text{ поскольку площадь изображения (дифракционного пятна) } S \sim \left(\frac{\lambda f}{D}\right)^2 \sim \frac{1}{D^2} \text{ получаем}$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \sqrt{\alpha\beta} = 10.$$

$$3.145. R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \simeq 1000.$$

$$3.146. \lambda = 0,573 \text{ Å}.$$

$$3.147. m = \frac{d}{b}.$$

$$3.148. D_{\text{min}} = \frac{\lambda d}{2\Delta\lambda}, \quad f_{\text{min}} = \frac{D_{\text{min}}}{d} L = 125 \text{ см}.$$

$$3.149. m = \frac{2l}{\lambda} \simeq 36300.$$

$$3.150. \frac{\lambda}{\delta\lambda} \simeq \frac{2\pi L}{\lambda(1-R)}, \text{ где } L \text{ — расстояние между зеркалами интерферометра, } R \text{ — коэффициент отражения зеркал}.$$

3.151. Решение. Добротность колебательной системы Q связана с потерями энергии за один период колебаний ΔW равенством $Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$, где W — энергия колебаний. Потери энергии при полном обходе волны через интерферометр туда-обратно (т.е. при двукратном отражении от зеркал) равны $\Delta W_1 = 2W(1 - R)$ (при условии, что коэффициент отражения R близок к единице). Поскольку время полного обхода равно $2L/c$, а период колебаний $T = \lambda/c$, то потери энергии за один период есть $\frac{\lambda}{2L} \Delta W$. Окончательно находим

$$Q = \frac{2\pi L}{\lambda(1 - R)}.$$

Ширина резонансной кривой связана с добротностью равенством:

$$Q = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{\nu}{\delta\nu},$$

откуда

$$\frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{2\pi L}{\lambda(1 - R)} \quad \text{и} \quad \delta\nu = \frac{\nu}{Q} = 0,05 \text{ МГц}, \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L} = 150 \text{ МГц}.$$

3.152. Указание. Интервал между спектральными линиями не должен превышать области дисперсии: $\Delta\lambda \leq \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda}{(2L/\lambda)} = \frac{\lambda^2}{2L}$. С другой стороны, интервал $\Delta\lambda$ должен разрешаться интерферометром: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \geq \frac{2\pi L}{\lambda(1 - R)}$. Из этих двух условий получаем

$$L_{\min} \simeq 0,0085 \text{ см}, \quad L_{\max} \simeq 0,53 \text{ см}.$$

$$\mathbf{3.153.} \quad R_{\max} \simeq \frac{fD}{\lambda d} = 5 \cdot 10^5.$$

3.154. Максимальный диаметр проволоки должен быть меньше расстояния между дифракционными максимумами $\pm$ первого порядка $d_{\max} < 2\lambda f/\Lambda = 10^{-2}$ см. Минимальный размер определяется шириной дифракционного максимума. Проволока должна его перекрыть полностью $d_{\min} \geq \frac{2\lambda f}{D} = 10^{-3}$ см.

$$\mathbf{3.155.} \quad I(x) = 1 + 2m \cos \Omega x \quad (\text{для пластины } \pi/2),$$

$$I(x) = 1 - 2m \cos \Omega x \quad (\text{для пластины } 3\pi/2).$$

При введении пластинки с коэффициентом поглощения k_n контраст увеличится в $(1/k_n)$ раз.

3.156. Указание. Разность фазовых набегов плоских волн, одна из которых распространяется вдоль оптической оси z , а две другие — под углами $\sin \alpha = \pm \lambda/d$, равен

$$\Delta\varphi = kz - k \cos \alpha \cdot z = kz(1 - \cos \alpha) \simeq \frac{k\alpha^2}{2} z = \pi \frac{\lambda z}{d^2}.$$

При $\Delta\varphi = \pi/2 + 2\pi n$ фазовая решетка превращается в амплитудную.

3.157. $\tau(x) \sim 1 + \cos \left(kL + \frac{kx^2}{2L} \right)$. Минимальный размер голограммы $a_{\min} = n\lambda L$, размер восстановленного изображения $b \simeq 1/n$.

3.158. Решение. При записи голограммы предмета, находящегося на расстоянии L от голограммы, разность хода не должна превышать длину когерентности $\Delta \simeq \frac{r^2}{2L} \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, откуда $\Delta\lambda \leq \frac{2L\lambda^2}{r^2} = 0,2 \text{ нм}$.

3.159. $D > \lambda L/b = 2,5$ см, $\Delta\lambda < 8b^2/L = 1,6$ нм.

3.160. $d \simeq \alpha L = 10^{-2}$ см, $\Delta\lambda \leq 2\alpha^2 L \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ см.

3.161. $d \simeq \sqrt{L\Delta\lambda/8} \simeq 10^{-3}$ см, $D \simeq \lambda L/d \simeq 6$ см.

9. Фазовая и групповая скорость. Дисперсия

3.162. *Решение.* Суперпозиция волн $s_1 = a \sin(\omega t - kx)$ и $s_1 = a \sin(\omega' t - k' x)$ есть

$$s = 2a \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t - \frac{k + k'}{2}x\right),$$

где $\delta\omega = \omega - \omega'$, $\delta k = k - k'$. При $\omega \simeq \omega'$ и $k \simeq k'$ имеем

$$s = 2a \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right) \sin(\omega t - kx).$$

Групповая скорость — это скорость перемещения огибающей, описывающей суперпозицию гармонических колебаний (например, скорость, с которой перемещается максимум амплитуды):

$$A(t, x) = 2a \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right).$$

Из условия $(\delta\omega/2)t - (\delta k/2)x = \text{const}$ находим

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \simeq \frac{\omega - \omega'}{k - k'}.$$

3.163. Используя выражение для фазовой скорости $v = \frac{\omega}{k}$, находим

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Далее, так как $v = \frac{c}{n}$, то $\frac{dv}{v} = -\frac{dn}{n}$ и $dv = -\frac{v}{n}dn$, откуда находим

$$u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right).$$

3.164. *Решение.* Из графика (см. рис. 3.41) следует $v = OA + \lambda \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной в точке λ_0 , т.е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dv}{d\lambda}$. Получаем $OA = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = u$.

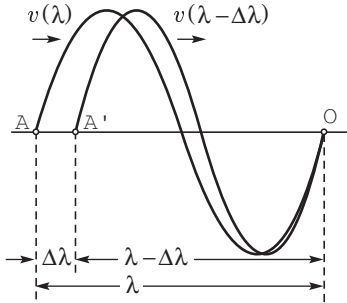


Рис. 3.16'

3.165. *Решение.* Рассмотрим две произвольные монохроматические компоненты возмущения с длинами волн λ и $\lambda - \Delta\lambda$ (рис. 3.16'). Суперпозиция этих компонент восстановит свое взаимное расположение (и, следовательно, свою пространственную форму), когда волновой фронт A волны с длиной λ , двигаясь со скоростью $v(\lambda)$ догонит волновой фронт A' волны с длиной $\lambda - \Delta\lambda$ (он перемещается с меньшей скоростью $v(\lambda - \Delta\lambda)$). Мы получаем $\Delta\lambda = [v(\lambda) - v(\lambda - \Delta\lambda)]\tau$, откуда $\tau = \frac{\Delta\lambda}{\Delta v} = \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^{-1}$. Через время τ точка

суммарного волнового возмущения O с фиксированной амплитудой колебаний (равной нулю), переместится на расстояние $s = v\tau - \lambda$. Мы получаем $\frac{s}{\tau} = v - \frac{\lambda}{\tau} = v - \lambda b = a$. И так как $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = a + b\lambda - b\lambda$, то $\frac{s}{\tau} = u$.

3.166. Решение. Для закона дисперсии $n^2(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ имеем

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega} k = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

или

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \omega^2 - \omega_p^2.$$

Дифференцируя последнее равенство, находим $2c^2 k dk = 2\omega^2 d\omega$. Окончательно получаем связь между фазовой и групповой скоростью $uv = c^2$, поэтому имеем $u = c^2/v = c \sin \alpha$.

3.167. $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, где $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$, N — концентрация электронов, m — масса электрона.

3.168. Показатель преломления $n < 1$ для радиоволн в ионосфере и для рентгеновских волн (см. задачи **3.166** и **3.167**).

3.169. Мнимость показателя преломления означает, что волна не может распространяться в среде при $\omega < \omega_p$ (ее амплитуда экспоненциально спадает по мере проникновения в среду).

3.170. Указание. При $\omega > \omega_p$ показатель преломления $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ действительная величина — волна проходит через ионосферу без поглощения. При $\omega < \omega_p$ n — чисто мнимая величина (действительная часть показателя преломления $n = n' + in''$ равна нулю), т.е. имеет место полное отражение при любом угле падения.

Предельное значение частоты $\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ определяется максимальной величиной концентрации свободных электронов на некоторой высоте, далее которой волна не распространяется.

3.171. Диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, где $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ — плазменная частота, откуда

$$N = \frac{(1 - n^2)m\varepsilon_0\omega^2}{e^2} \simeq 0,24 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}.$$

Фазовая скорость $v = c/n = 3,3 \cdot 10^8$ м/с, групповая скорость $u = c^2/v \simeq 2,7 \cdot 10^8$ м/с.

$$\mathbf{3.172.} \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{Ne^2\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 c^2}}}.$$

3.173. Импульс радиоизлучения распространяется с групповой скоростью $u = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, где $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$. Расстояние dx импульс проходит за время $dt = \frac{dx}{u}$,

поэтому полное время распространения импульса $t = \int \frac{dx}{u}$. Используя полученные выражения, находим

$$n = \int N(x) dx = \frac{2\pi c \Delta t}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) r_0},$$

где $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м — классический радиус электрона.

$$\mathbf{3.174.} \quad L = \frac{8\pi^2 c \epsilon_0 m \Delta t}{N e^2} \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \quad (\text{см. задачу 3.170}).$$

3.175. Разность фазовых набегов между любой m -й гармоникой и основной (первой гармоникой) периодического сигнала: $\Delta\varphi_m = [k(m\omega_0) - k(\omega_0)]L = B(m^4 - 1)\omega_0^4 L$. Выберем частоту повторения ω_0 так, чтобы $B\omega_0^4 L = 2\pi$, т.е. $\omega_0^4 = \frac{2\pi}{BL}$. Тогда $\Delta\varphi_m = 2\pi(m^4 - 1)$ кратно 2π для всех m , т.е. повторяется неискаженная форма сигнала. Таким образом

$$\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{2\pi}{BL}}.$$

10. Поляризация. Элементы кристаллооптики. Нелинейные оптические явления

$$\mathbf{3.176.} \quad d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,0014 \text{ мм.}$$

3.177. Решение. Пластинка должна служить пластинкой в $\lambda/4$ для длины волны λ_1 , и одновременно пластинкой $\lambda/2$ для длины волны λ_2 :

$$\Delta n d = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{4} = m\lambda_2 - \frac{\lambda_2}{2},$$

откуда $m\delta\lambda = \frac{\lambda_1}{4}$, где $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, $m \simeq \frac{\lambda}{4\delta\lambda} \simeq 10$, $d = 0,003$ мм.

$$\mathbf{3.178.} \quad \Delta = (n_o - n_e)d = 5,16 \text{ мкм.}$$

$$\mathbf{3.179.} \quad d = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 0,027 \text{ мм.}$$

3.180. В стекле и фарах автомашины разрешенные направления поляроидов должны быть параллельны между собой и составлять угол 45° с горизонтом, при этом у всех машин они должны быть повернуты в одну и ту же сторону (считая по ходу машины).

3.181. При введении пластинки в полволны интерференционные полосы смещаются на половину ширины полосы, при повороте поляроида на 90° полосы смещаются на половину ширины полосы в противоположную сторону (относительно начального положения). Если поляроид убрать, то положение полос не изменится, а интенсивность возрастет вдвое. При введении пластинки в $\lambda/4$ полосы смещаются на четверть ширины полосы. Если в этом случае убрать поляроид, то интерференционные полосы исчезнут.

3.182. Решение. При первом положении николя $I_1 = I_n + \frac{I_e}{2}$, а при втором $I_2 = I_n \cos^2(60^\circ) + \frac{I_e}{2}$. По условию, $I_1 = 2I_2$, откуда $I_n = I_e$, $I_{\max} = \frac{3}{2}I_n$, $I_{\min} = \frac{1}{2}I_n$,

следовательно

$$\Delta = \frac{1}{2}, \quad \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = 3.$$

3.183. $I_2/I_1 = 0,5$.

3.184. $\varphi = 45^\circ$.

3.185. $\frac{I_k}{I_l} = \frac{\sin^2 \alpha - (P/100)}{P/200} = \frac{1}{2}$.

3.186. С помощью пластинки в $\lambda/4$ и поляроида. После прохождения пластинки свет становится линейно-поляризованным, причем направление колебаний вектора $\mathbf{E}$ составляет угол $\pm 45^\circ$ с осью кристалла. Далее направление колебаний определяется с помощью поляроида.

3.187. Поставим на пути света пластинку в $\lambda/4$ и николю (поляроид). Если при вращении николя (и любом положении пластинки) интенсивность не меняется, то свет естественный, если меняется и падает до нуля — поляризованный по кругу, если меняется, но не падает до нуля — частично поляризованный.

3.189. $\Delta = 5,16$ мкм.

3.190. $d = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 0,027$ мм.

3.191. $d = 0,07$ мм. *Указание.* Пластинка кварца должна быть пластинкой в λ для линии λ_1 , и пластинкой в $\lambda/2$ для линии λ_2 .

3.192. Оптическая ось пластинки должна быть ориентирована под углом 45° к разрешенным направлениям поляроида, причем для одной из линий дублета она должна быть пластинкой в $\lambda/2$, а для другой — пластинкой в λ .

3.193. $a/b = \sqrt{3}$, $\varphi = 53^\circ$. *Указание.* Эллиптически поляризованный свет оказывается линейно поляризованным при прохождении пластинки в $\lambda/4$ лишь в том случае, когда оси эллипса ориентированы вдоль главных направлений пластинки. В этом случае сдвиг фаз между двумя взаимно перпендикулярными колебаниями, происходящими вдоль главных направлений и равный $\pi/2$ либо компенсируется пластинкой, либо дополняется до π — в любом случае свет становится линейно поляризованным.

3.194. Свет на выходе пластинки оказывается неполяризованным, если, во-первых, разность хода двух взаимно перпендикулярных компонент светового пучка, ориентированных вдоль главных направлений пластинки, окажется больше длины когерентности $(n_0 - n_e)d \geq \lambda^2/\Delta\lambda$ и, во-вторых, амплитуды колебаний этих компонент равны, т.е. $\alpha = 45^\circ$,

$$d \geq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda(n_0 - n_e)} = 1 \text{ мм.}$$

3.195. Разложим световую волну на две компоненты с взаимно перпендикулярной ориентацией плоскости колебаний вектора $\mathbf{E}$ (направления колебаний совпадают с главными осями пластинки). При введении пластинки интерференционные полосы от каждой компоненты сместятся, причем разность смещений окажется равной половине ширины полосы, если использовать пластинку в $\lambda/2$ — полосы исчезнут, а при введении поляроида появятся вновь. Исключение составляет случай, когда разрешенное направление поляроида составляет угол 45° с осями пластинки. В этом случае полосы наблюдаться не будут.

3.196. $d = \frac{m\lambda}{n-1}$, $I_{\max} = \frac{5}{8} I_0$.

3.197. $I = \frac{1}{2} I_0$.

3.198. $\beta = \frac{1}{3}$.

3.200. $I = N^2 I_0$, где I_0 — интенсивность падающей на пластинку волны, N — число зон Френеля.

3.201. Уменьшится вдвое независимо от поляризации падающего света.

3.202. Решение. Линейно поляризованный свет после прохождения поляроида Π можно рассматривать как суперпозицию двух волн, в которых колебания вектора $\mathbf{E}$ совпадают с одним из главных направлений пластинки из кварца (и имеют одинаковые фазы и амплитуду $A = \frac{A_0}{2}$, A_0 — амплитуда падающей на поляроид волны). Для луча, проходящего клин на расстоянии x от ребра, разность хода этих волн равна $\Delta = \alpha x(n_0 - n_e)$, а разность фаз $\varphi = k\alpha x(n_0 - n_e)$. После прохождения второго поляроида эти волны создают два одинаково поляризованных (вдоль разрешенного направления поляроида) колебания, которые имеют амплитуду $\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{A_0}{2\sqrt{2}}$ (и интенсивность $I = \frac{I_0}{8}$) и интерferируют на экране $\mathcal{E}$. Мы получаем

$$I(x) = 2I_0[1 + \cos\varphi(x)] = \frac{I_0}{4} \{1 + \cos[kdx(n_0 - n_e)]\}.$$

При установке линзы с фокусным расстоянием F получим на экране два светлых пятна на расстоянии $L = \alpha(n_0 - n_e)F$.

$$\mathbf{3.203.} \quad R = \frac{cr_0^2}{16\pi n_2 I_0 L} = 3 \text{ м.}$$

$$\mathbf{3.204.} \quad \text{Пороговая мощность } P_{\text{пор}} \simeq \frac{\pi \varepsilon_0 c \lambda}{16 n_2} = 0,4 \cdot 10^8 \text{ Вт.}$$

Г л а в а IV

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

1. Атомные спектры и планетарная модель атома

4.3. 0,53 и 0,11 Å; 13,4 эВ и 33,5 кэВ.

4.6. 8210 Å.

4.7. *Решение.* $\Delta E \propto 1/n^2 - 1/(n+1)^2 \propto 1/\lambda$,

$\lambda_2/\lambda_1 = [(n_1)^{-2} - (n_1 + 1)^{-2}] / [(n_2)^{-2} - (n_2 + 1)^{-2}] \simeq (5/36) / [2n_2/(n_2)^4]$;
 $n_2 = [(2 \cdot 0,49 \cdot 36) / (5 \cdot 6,56 \cdot 10^{-7})]^{1/3} \simeq 220$.

4.8. 1216 Å, 1026 Å, 6563 Å.

4.9. $v = 1,9 \cdot 10^8$ см/с, $\lambda = 1216$ Å.

4.10. $E = 122,2$ эВ.

4.11. 1850.

4.12. *Решение.* $\oint p dq = \oint M d\varphi = 2\pi M_z = 2\pi n\hbar$; $m_z = n\hbar$.

2. Корпускулярные свойства электромагнитного излучения

4.13. *Решение.* Пусть W — мощность лампочки, L — расстояние между лампочкой и катодом, d — диаметр атома тантала. За время t энергия, накопленная в атоме, равна $(W/4\pi L^2)(\pi d^2/4)t$. Для вылета фотоэлектрона необходимо, чтобы эта энергия была не меньше работы выхода P , т.е. $t \geq 16PL^2/Wd^2 = 455$ с.

4.14. *Решение.*

$$W = h \frac{c}{\lambda} n \frac{\pi d^2}{4}, \quad n = \frac{4W\lambda}{\pi d^2 h c},$$

где n — плотность потока фотонов, c — скорость света, h — постоянная Планка.

4.15. 0,2%.

4.16. $2,03 \cdot 10^{-6}$ Н/м².

4.17. $3,5 \cdot 10^{-6}$ Н/м²; $7 \cdot 10^{-6}$ Н/м².

4.18. 2620 Å.

4.20. $A = 2,29$ эВ; $v = 5,4 \cdot 10^7$ см/с.

4.21. $2,3 \cdot 10^9$ см/с.

4.22. 1,25 В.

4.23. *Решение.* Выбитые светом электроны не должны уходить на ∞ , т.е.

$$eV_{\max} = E_{\text{кин}} = \frac{hc}{\lambda} - P; \quad V_{\max} = \frac{1}{e} \left(\frac{hc}{\lambda} - P \right) = 1,22 \text{ эВ}.$$

4.24. *Решение.* Такая волна является суперпозицией синусоидальных волн с частотами Ω и $\Omega \pm \omega$. Энергии соответствующих фотонов равны $\hbar\Omega = 13,2$ эВ, $\hbar(\Omega - \omega) = 11,9$ эВ и $\hbar(\Omega + \omega) = 14,5$ эВ. Таким образом, энергия фотоэлектронов $W = \hbar(\Omega + \omega) - W_i = 1$ эВ.

4.25. *Решение.* Рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Пусть в выбранной нами системе координат электрон до столкновения покоился (такой выбор никак не ограничивает общности рассмотрения). Законы сохранения в этой системе выглядят следующим образом:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2}, \quad \frac{h\nu}{c} = mv.$$

Для первое соотношение на второе, имеем $v = 2c$, т.е. получаем нефизический результат, так как скорость электрона после поглощения не зависит от частоты (т.е. энергии) кванта, да и к тому же принимает значение $2c$! Теперь покажем, что и релятивистское рассмотрение не спасает дела:

$$h\nu + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{h\nu}{c} = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2} = 1,$$

что может иметь место только при $\beta = 0$ или $\beta = 1$. Опять результат абсурдный. Следовательно, использованные здесь уравнения несовместны. Это означает, что процесс поглощения фотона свободным электроном невозможен, поскольку для такого процесса не могут одновременно выполняться законы сохранения энергии и импульса. Аналогично можно убедиться, что и излучение фотона свободным электроном также невозможно.

4.26. Решение. Пусть φ и ψ — углы падения и преломления соответственно; при переходе через границу волновой вектор k изменяется в n раз, где n — относительный показатель преломления второй среды относительно первой, т.е. $k_2 = nk_1$. Тангенциальная составляющая импульса фотона в первой среде равна $\hbar k_1 \sin \varphi$, а во второй — $\hbar k_2 \sin \psi = \hbar k_1 \sin \psi = \hbar k_1 \sin \varphi$ (так как $\sin \varphi = n \sin \psi$), что и требовалось доказать.

4.27. Решение.

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = 2,42 \cdot 10^{-10} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ см} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

4.28. 0,05 МэВ

4.29. 0,16 МэВ; 0,14 МэВ.

4.30. Решение.

$$h\nu + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta'^2}},$$

$$\frac{h\nu}{c} - \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{h\nu'}{c} - \frac{m\beta' c}{\sqrt{1-\beta'^2}}.$$

Отсюда следует:

$$\left(h\nu - h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(h\nu + h\nu' - \frac{mc^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = m^2 c^4$$

или

$$\left(2h\nu + \frac{mc^2(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left(-2h\nu' + \frac{mc^2(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m^2 c^4,$$

$$2h\nu \frac{mc^2(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2h\nu' \frac{mc^2(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} + 4h\nu h\nu'.$$

В результате

$$h\nu' = \frac{2h\nu mc^2(1+\beta)}{2mc^2(1-\beta) + 4h\nu\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Численные оценки дают:

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{mc^2}{E} \approx \frac{mc^2}{W_k} = 10^{-3},$$

или $\beta^2 = 1 - 10^{-6}$, $\beta = 1 - 0,5 \cdot 10^{-6}$, $1 - \beta = 0,5 \cdot 10^{-6}$, $h\nu = hc/\lambda \approx 1,8$ эВ;

$$\frac{mc^2(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 250 \text{ МэВ},$$

и таким образом,

$$W_\gamma \equiv h\nu' \approx \frac{hc}{\lambda} \frac{1+\beta}{1-\beta} = 7,14 \text{ МэВ}.$$

4.31. Решение. Разрешающая способность R должна быть больше, чем

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Lambda(1-\cos\vartheta)} = \frac{\lambda}{\Lambda(\sin^2\vartheta/2)},$$

где Λ — комптоновская длина волн. Оцениваем R по формуле $R = mN$, где m — порядок интерференции (в нашем случае $m = 1$), а N — число интерферирующих лучей, равное b/d , где b — толщина кристаллической пластинки. В результате получаем

$$b \geq \frac{\lambda d}{2\Lambda \sin^2\vartheta/2} = \frac{\lambda m_e c d}{2h \sin^2\vartheta/2} = 11,4 \text{ мм}.$$

4.32. Решение. Законы сохранения приводят к соотношениям:

$$h\nu = h\nu' + T, \quad \text{где } T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2;$$

$$\frac{h\nu'}{c} \sin\vartheta = p \sin\varphi;$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\vartheta + p \cos\varphi.$$

Из последних двух соотношений получается

$$\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + p^2 - 2\frac{h\nu}{c} p \cos\varphi,$$

что совместно с первым соотношением дает

$$(h\nu')^2 = (h\nu)^2 + T^2 + 2h\nu'T + p^2 c^2 - 2h\nu'pc \cos\varphi - 2Tpc \cos\varphi.$$

В результате

$$h\nu' = \frac{T^2 + p^2 c^2 - 2Tpc \cos\varphi}{2(pc \cos\varphi - T)}.$$

По смыслу величина $h\nu'$ положительна, и поскольку числитель этого выражения всегда положителен, то должно выполняться неравенство $pc \cos\varphi - T > 0$ или $\cos\varphi > T/pc$. Таким образом

$$\cos\varphi > \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} - \frac{mc}{p}.$$

4.33. Решение. Из решения зад. 4.32 следует, что $pc \cos\varphi - T > 0$. Отсюда нетрудно получить, что в условиях настоящей задачи

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 < \frac{pc}{2},$$

или

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 < \frac{p^2 c^2}{4} + p m c^2 + m^2 c^4,$$

откуда получается, что

$$\frac{pc}{2} < \frac{2}{3}mc^2.$$

В результате $T < \frac{2}{3}mc^2$, то есть $T < 0,34$ МэВ.

3. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

4.34. Решение. Искомое разрешение $\Delta T/T = (T_\Phi - T_\kappa)/T_\Phi$; $T_\Phi \approx W_\gamma$, $T_\kappa = W_\gamma - W_{\gamma'}$, то есть $\Delta T/T = W_{\gamma'}/W_\gamma$. А поскольку $W_{\gamma'} = hc/(\lambda + \Delta\lambda)$, $\lambda = hc/W_\gamma$ и $\Delta\lambda = 2h/mc$, то

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{W_{\gamma'}}{W_\gamma} = \left(1 + \frac{2W_\gamma}{mc^2}\right)^{-1}.$$

4.36. 0,73 Å, 1,4 Å, 0,28 Å.

4.37. 7,9 см.

4.38. Решение. Показатель преломления $n = \sin \varphi / \sin \varphi'$, где $\sin \varphi = v_\perp / v$, и $\sin \varphi' = v'_\perp / v'$; при этом $v'_\perp = v_\perp$. Таким образом,

$$n = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{W_\kappa + eU_1}{W_\kappa}} = \sqrt{1,36} \approx 1,17.$$

В случае полного отражения $\sin \varphi' = 1$, и $n_0 = \sin \varphi$, то есть

$$n_0 = \sqrt{1 + \frac{eU_2}{W_\kappa}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{eU_2}{W_\kappa} = -\frac{3}{4}, \quad U_2 = 75 \text{ В.}$$

4.39. Решение. Чтобы дифракция была наблюдаема, размер щели должен быть порядка длины волны де Бройля, которая равна $\lambda = h/mv$, где $m \sim 0,005$ г. Таким образом:

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} \sim 10^{-26} \text{ см(!)}.$$

4.40. Решение. Максимальное различие результатов измерений времени распространения электромагнитных волн от Земли до Луны и обратно составляет $\Delta t = 2(L + \delta L)/c - 2(L - \delta L)/c = 4\delta L/c$. В случае $m_\gamma \neq 0$ различие во времени распространения с разными длинами волн равно $\Delta t' = 2L/v - 2L/v' \approx 2L\Delta v/c^2$, где v и v' — скорости фотонов, соответствующих разным длинам волн. Эти скорости являются групповыми скоростями соответствующих волн де Бройля:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d}{dp} \sqrt{p^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4} = \frac{c}{\sqrt{1 + m_\gamma^2 c^2 / p^2}} \approx c \left(1 - \frac{m_\gamma^2 c^2}{2p^2}\right) = c \left(1 - \frac{m_\gamma^2 c^2}{2h^2} \lambda^2\right).$$

Таким образом, $\Delta v = v' - v = m_\gamma^2 c^3 (\lambda^2 - \lambda'^2) / 2h^2$. Но поскольку $\lambda \gg \lambda'$ (λ' лежит в оптическом диапазоне), то $\Delta v = m_\gamma^2 c^3 \lambda^2 / 2h^2$ и $\Delta t' = L m_\gamma^2 c \lambda^2 / h^2$. Оценка верхней границы m_γ получается, если положить $\Delta t' = \Delta t$, т.е. $L m_\gamma^2 c \lambda^2 / h^2 = 2\delta L / c$, откуда следует, что

$$m_\gamma \leq \frac{h}{c\lambda} \sqrt{\frac{4\delta L}{L}} \approx 10^{-41} \text{ г.}$$

4.41. Решение. Диаметр пятна D складывается из ширины выходной щели b и уширения пучка за счет его дифракции на щели. Последняя определяется как $L\Delta p_{\perp}/p$. Величина $\Delta p_{\perp}$ оценивается согласно соотношению неопределенностей: $\Delta p_{\perp} \sim \hbar/b$. Таким образом,

$$D = b + \frac{\hbar}{b/p}L, \quad \frac{dD}{db} = 0, \quad 1 - \frac{\hbar L}{pb^2}, \quad d = \sqrt{\frac{\hbar L}{p}}.$$

Поскольку $p \sim \sqrt{3mk_B T}$, то

$$b = \sqrt{\hbar L} \sqrt{3mk_B T}, \quad D_{\min} = 2\sqrt{\frac{\hbar L}{p}} = \frac{2\sqrt{\hbar L}}{\sqrt[4]{3mk_B T}} \approx 2 \text{ мкм}.$$

4.42. Решение. Наибольшему углу отдачи в этом случае соответствует электрон, первоначальный импульс которого p_0 перпендикулярен направлению движения фотона. Величину p_0 оцениваем из соотношения неопределенностей: $p_0 \sim \hbar/a$, где a — размер атома (радиус первой боровской орбиты). Продольную составляющую p_l импульса электрона отдачи нетрудно оценить из закона сохранения импульса: $\hbar\omega/c = \hbar\omega'/c + p_l$, откуда следует, что

$$p_l = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} + \frac{2\pi\hbar}{\lambda + \Delta\lambda} \approx \frac{4\pi\hbar}{\lambda},$$

так как

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{mc} = 4,84 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Следовательно,

$$\text{tg } \varphi = \frac{p_0}{p_l} = \frac{\lambda}{4\pi a} = 0,16, \quad \text{т.е. } \varphi \approx 10^\circ.$$

4.43. Решение. Изменение координаты частицы Δx_F в результате действия на нее силы F в течение времени τ равно $F\tau^2/2m$. Обнаружить это изменение возможно, если оно будет превышать неопределенность координаты Δx по прошествии времени $t = \tau$, которая включает в себя неопределенность Δx_0 в момент времени $t = 0$ и неопределенность $\Delta x_p = \Delta p\tau/m$, появляющуюся за время движения τ в результате существования неопределенности импульса Δp . Результирующую неопределенность Δx находим по правилу сложения неопределенностей независимых величин, т.е. $\overline{\Delta x^2} = \overline{\Delta x_0^2} + \overline{\Delta x_p^2}$. Поскольку $\overline{\Delta p^2} \geq \hbar^2/4\overline{\Delta x_0^2}$, то $\overline{\Delta x^2} \geq \overline{\Delta x_0^2} + \hbar^2\tau^2/4m^2\overline{\Delta x_0^2}$ и минимальное значение $\overline{\Delta x^2}$, соответствующее значению $\overline{\Delta x_0^2} = \hbar\tau/2m$, составляет $\hbar\tau/m$. Следовательно, $\Delta x_F^2 = F^2\tau^4/4m^2 \geq \hbar\tau/m$, и таким образом, $F \geq \sqrt{4m\hbar/\tau^3}$.

4.44. Решение. Рождение виртуальной пары электрон-позитрон приводит к неопределенности энергии $\Delta E \geq 2m_e c^2$. Соотношение неопределенностей энергия-время дает оценку времени существования такой пары: $\tau \sim \hbar/2mc^2$. За это время электрон пары может сместиться на расстояние в пределах $\sim c\tau$, что по существу и представляет собой неопределенность координаты электрона, т.е. $\Delta x \sim \hbar/2mc$.

4.45. $\Delta E = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$, $\Delta\lambda = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ Å}$, $\Delta x = 300 \text{ см}$.

4.46. Решение. Угол φ между направлениями излучения и движения электрона в рассматриваемом случае определяется условием $\cos\varphi = c/nv$. Поэтому неопределенности этого угла и скорости электрона связаны соотношением

$$\sin\varphi \Delta\varphi = \frac{c\Delta v}{nv^2}.$$

Находясь в слое вещества толщины b , электрон имеет неопределенность импульса

$\Delta p \sim \hbar/b$ и неопределенность скорости $\Delta v \sim \hbar/m_e b$. Отсюда следует оценка неопределенности угла φ :

$$\Delta\varphi \sim \frac{c\hbar}{m_e b n v^2 \sin \varphi}.$$

4.47. $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{nh}{\lambda\sqrt{2m_e K}}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$; при $n = 1$ $\varphi_1 = 0,1$ мрад.

4. Уравнение Шредингера. Операторы. Туннельный эффект

4.48. а) *Решение.* $\left(\frac{d}{dx}x\psi\right) = \psi + x\frac{d\psi}{dx} = \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)\psi.$

4.49. $(2 - x^2) \cos x - 4x \sin x.$

4.50. $(1 + 3x + x^2)e^x.$

4.52. *Решение.* Для плоской волны $\psi = \exp(ikz)$ по определению потока получается, что $j_x = j_y = 0$, и $j_z = \hbar k/m = p_z/m = v_z$. В случае сферической расходящейся волны $\psi = (1/kr) \exp(ikr)$ вектор плотности потока направлен по радиусу-вектору $\mathbf{r}$. Так как радиальная компонента вектора Δ есть $\partial/\partial r$, то по определению потока получаем

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{(kr)^2} \mathbf{r},$$

или, поскольку $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r}$:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{(kr)^2} \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\mathbf{v}}{(kr)^2}.$$

Тот же результат можно получить и в декартовых координатах:

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\hbar k_x}{m} \frac{1}{(kr)^2} = \frac{v_x}{(kr)^2}$$

и т.д. Для суммы сходящейся и расходящейся волн аналогичным образом получаем

$$\mathbf{j} = \frac{1}{(2kr)^2} \frac{\mathbf{p}}{m} (S^* S - 1) = \frac{\mathbf{v}}{(2kr)^2} (|S|^2 - 1).$$

4.53. *Решение.* Для прямоугольного барьера высоты U и ширины a в случае, когда энергия падающей частицы больше высоты барьера, т.е. $E > U$, для коэффициента отражения r и коэффициента прохождения d получаются следующие выражения:

$$r = \frac{(k_1^2 - k^2)(1 - e^{2ika})}{(k_1 + k)^2 - (k_1 - k)^2 e^{2ika}}, \quad d = \frac{4k_1 k e^{-i(k_1 - k)a}}{(k_1 + k)^2 - (k_1 - k)^2 e^{2ika}},$$

где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ — волновое число падающей частицы. Для того, чтобы частица не отражалась от барьера, необходимо, чтобы $r = 0$, т.е.

$$2ka = 2\pi n \quad \text{и} \quad E = U + \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т.е. энергия частицы должна совпадать с одним из собственных значений энергии в бесконечно глубокой яме, дно которой расположено на высоте барьера. Таким образом, $E_n = (5 + 37,62n^2)$ эВ, $n = 1, 2, \dots$

4.54. $2,5; 2644 \cdot 10^{-2}.$

4.55. $8,8.$

4.56. Решение.

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{2m \left(U_0 - U_0 \frac{x^2}{a^2} - E \right)} dx \right], \quad \text{где} \quad x_0 = a \sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}.$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{2m \left(U_0 - E - U_0 \frac{x^2}{a^2} \right)} dx = \sqrt{2m} \frac{a(U_0 - E)}{\sqrt{U_0}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy =$$

$$= \frac{\pi a \sqrt{2m} (U_0 - E)}{2\sqrt{U_0}}.$$

В результате

$$D \approx \exp \left[-\frac{\pi a \sqrt{2m} (U_0 - E)}{\hbar \sqrt{U_0}} \right] = \exp \left[-2\pi \frac{U_0 - E}{\hbar \omega} \right], \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\frac{2U_0}{ma^2}} = \sqrt{\frac{U''}{m}}.$$

4.57. Решение. Так как ширина барьера достаточно велика (9d), то при определении глубины ямы можно считать, что при $x > d$ волновая функция электрона имеет вид $\psi = A \exp(-\alpha x)$, где $\alpha = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$. При $x < d$, волновая функция выглядит как $\psi = B \sin kx$, где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Сшивая логарифмические производные при $x = d$, получаем $\operatorname{ctg} kd = -\alpha/k$, или $\sin^2 kd = k^2/(k^2 + \alpha^2) = E/U_0$. Таким образом, $U_0 = E \sin^{-2}(d\sqrt{2mE}/\hbar) = 1,655$ эВ. Прозрачность барьера $D \approx \exp[-18d\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar] \approx 1,87 \cdot 10^{-5}$. Учет предэкспоненциального фактора, равного в этом случае $16E(U_0 - E)U_0^{-2}$, увеличивает значение D всего на $\approx 35\%$. Если n — число ударов о стенку в секунду, то время t равно $(nD)^{-1} \ln 2$. Число ударов оцениваем как $n = v/2d$, где v — средняя скорость электрона в яме. Последнюю можно оценить как из соотношения неопределенностей ($v \sim \hbar/md$), так и из соотношения $v = \sqrt{2E/m}$. Обе оценки дают для n близкие значения $n \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$. В результате получаем для искомого времени оценку $t \sim 3 \cdot 10^{-11} \text{ с}$.

4.58. Решение. Коэффициент прозрачности барьера (рис. 4.1') равен

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{U_0 R}{r} - E \right)} dr \right],$$

где $r_0 = U_0 R/E$. Интеграл в выражении для D легко берется, например, с помощью подстановки $x = \sqrt{1 - Er/U_0 R}$. В результате

$$D \approx \left[-\frac{2R\sqrt{2U_0 m_\alpha}}{\hbar} \left(\sqrt{\frac{U_0}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{U_0}} - \sqrt{1 - \frac{E}{U_0}} \right) \right].$$

При $E \ll U_0$ это выражение переходит в

$$D \approx \left[-\frac{2R\sqrt{2U_0 m_\alpha}}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{U_0}{E}} - 2 \right) \right].$$

Для приближенной оценки вероятности распада в единицу времени можно, исходя из классических представлений, умножить D на число соударений α -частиц с потенциальной стенкой за одну секунду, которое по порядку величины равно v/R , где v — средняя скорость α -частиц в ядре. Эту скорость можно оценить из соотношения неопределенностей: $v = p/m_\alpha \approx \hbar/m_\alpha R$. Таким образом, вероятность распада в секунду (так

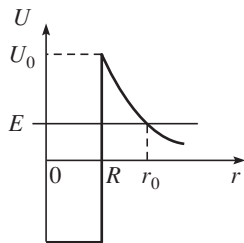


Рис. 4.1'

называемая константа распада) равна $\lambda \frac{\hbar}{m_\alpha R^2} D$, а период полураспада $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{m_\alpha R^2 \ln 2}{\hbar D}$. Подставляя сюда выражение для D и логарифмируя, получаем искомое соотношение $\ln T = A/\sqrt{E} + B$, где A и B — некоторые постоянные.

5. Дискретность энергетических состояний

4.59. Решение. Стационарная часть волновой функции частицы имеет вид $\psi = \sqrt{2/a} \sin kx$, где $k = n\pi/a$, $n = 1, 2, \dots$. Вероятность нахождения частицы в интервале от $a/8$ до $a/8 \pm 0,01a$ от края потенциальной ямы при $n = 5$ будет

$$\psi^2 \Delta x = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{5\pi a}{a \cdot 8} \cdot 0,01a = 0,02 \cdot 0,925^2 = 0,017.$$

4.60. $4,7 \cdot 10^{-13}$ см.

4.61. 2; 0.

4.62. Решение. Нейтрон, попавший в канал, находится в двумерной бесконечно глубокой яме в плоскости, перпендикулярной оси канала (рис. 4.2'). Поэтому его энергия должна быть больше, чем минимальная энергия в такой яме:

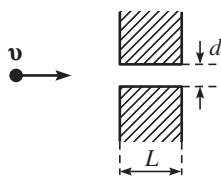


Рис. 4.2'

$$\frac{mv^2}{2} > \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{h^2} \right).$$

Отсюда следует, что в первом случае $v > \pi \hbar / md \approx 2$ см/с, а во втором ($h = d$) — $v > \sqrt{2} \pi \hbar / md \approx 2,8$ см/с. Отметим, что аналогичную оценку (но более грубую) можно получить, используя соотношения неопределенностей в плоскости, перпендикулярной оси канала.

4.63. Решение. Частота излученного фотона

$$\omega_{\text{кв}} = \frac{E_{n+1} - E_n}{\hbar} = \frac{\pi \hbar (n + 1/2)}{ma^2}.$$

Классическая частица с энергией E_n в таком потенциале совершает периодическое движение, отражаясь от стенок ямы. Скорость ее движения в яме легко определить из условия $mv^2/2 = E_n$, которое дает: $v = \pi \hbar n / ma$. Период такого движения равен

$$T = \frac{2a}{v} = \frac{2a^2}{\pi \hbar n}, \quad \text{и} \quad \omega_{\text{кв}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi^2 \hbar n}{ma^2}.$$

Таким образом, $\omega_{\text{кв}}/\omega_{\text{кл}} = 1 + 1/2n$.

4.64. Решение. Внутри ямы ($0 \leq z \leq a$) $\psi = A \sin kz$, вне ее (т.е. при $z > a$) $\Psi = b \exp(-\kappa z)$. Условие сшивания при $z = a$ дает $\text{ctg} ka = -\kappa/k$. Поскольку максимум ψ согласно условию задачи достигается при $z_1 = 0,99a$, то $kz_1 = \pi/2$ или

$$k = \frac{\pi}{2a} (1 + \delta), \quad \text{где} \quad \delta = 0,01.$$

Тогда условие сшивания можно переписать в виде

$$\text{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \delta \right) \approx -\frac{\pi \delta}{2} = -\frac{\kappa}{k} \quad \text{или} \quad \kappa = \frac{\pi \delta k}{2} \approx \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\delta}{a}, \quad \text{т.е.} \quad \kappa \gg \frac{1}{a}.$$

В качестве оценки размера области локализации атома можно принять расстояние, на котором $|\psi|^2$ убывает в e раз, т.е. $\langle z \rangle \sim 1/2\kappa \approx 100 \text{ \AA}$. Отметим, что расчет этого

размера как квантово-механического среднего расстояния атома от поверхности твердого тела приводит к величине $\approx 150 \text{ \AA}$.

4.65. Решение. Плотность вероятности $\omega(x)$ нахождения частицы в точке x пропорциональна $|\psi(x)|^2$, то есть $\omega(x) \propto x^2 \exp(-2x/a)$. Нетрудно показать, что максимум $\omega(x)$ расположен при $x = a$, а ширина максимума $\Delta \simeq a$. Если принять эту величину за неопределенность координаты, то согласно соотношению неопределенностей $\Delta p \sim \hbar/a$. Полагая $p \sim \Delta p$, получаем оценку для средней кинетической энергии $\bar{T} \sim \hbar^2/2ma^2$. Подставляя $\psi(x)$ в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi,$$

получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a} \right) + V(x)x = Ex.$$

При $x \rightarrow \infty$

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}x = Ex, \quad \text{т.е.} \quad E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{и} \quad V(x) = -\frac{\hbar^2}{max}.$$

Теперь рассчитаем средние значения T и V . Для этого из условия нормировки определим постоянную A :

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{2x}{a}\right) dx = \frac{a^3}{4}, \quad \text{т.е.} \quad A = \frac{2}{\sqrt{a^3}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \int_0^\infty \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi dx = \\ &= \frac{4}{a^3} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \left(x \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right) dx = \frac{\hbar^2}{2ma^2}, \end{aligned}$$

что совпадает с оценкой средней кинетической энергии, полученной из соотношения неопределенностей (точное совпадение в значительной мере случайно и связано с выбором $\Delta x = a$). Аналогично находим $\bar{V}$:

$$\bar{V} = -\frac{\hbar^2}{ma} \frac{4}{a^3} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{2x}{a}\right) dx = -\frac{\hbar^2}{ma^2}.$$

Легко видеть, что $\bar{T} + \bar{V} = \bar{E} \equiv E$.

4.66. $m_\pi c^2 = 137 \text{ МэВ}$; $a_3 \approx 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ см}$.

4.67. Решение. Вероятность найти мюон на расстояниях от r до $r + dr$ от центра ядра равна $w(r)dr = (4\pi r^2/\pi a_B^3) \exp(-2r/a_B)dr$. Поправка к энергии

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_0^{r_{\text{я}}} \frac{Ze^2}{r} \frac{4r^2}{a_B^3} \exp(-r/a_B) dr = \frac{Ze^2}{a_B} \left[1 - \left(1 + \frac{2r_{\text{я}}}{a_B} \right) \right] \exp\left(-\frac{2r_{\text{я}}}{a_B}\right) \approx \\ &\approx \frac{Ze^2}{a_B} \left[1 - \left(1 - \frac{4r_{\text{я}}^2}{a_B^2} \right) \right] = \frac{Ze^2}{a_B} \left(\frac{2r_{\text{я}}}{a_B} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $E = \bar{U}/2 = Ze^2/2a_B$ (U — потенциальная энергия), то $\Delta E/E = 8r_J^2/a_B^2 = 0,16$.

4.68. Решение.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0.$$

Подстановка решения в уравнение дает

$$\alpha^2 - \frac{2}{r} \alpha + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) = 0,$$

или

$$\alpha^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0, \quad -\frac{2}{r} \alpha + \frac{2Zme^2}{\hbar^2 r} = 0.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{me^2 Z}{\hbar^2}; \quad E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} Z^2 = 13,5 \text{ эВ} \cdot 100 = 1,35 \text{ кэВ}.$$

Это основное состояние водородоподобного атома.

4.69. $\Delta E = 40,8 \text{ эВ}$, $\lambda = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 300 \text{ \AA}$.

4.70. Решение. Подставляя ψ в уравнение Шредингера (в сферических координатах):

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi - \frac{e^2}{r} \psi = E\psi,$$

определяем значения энергии E и констант α и β :

$$E = -\frac{\mu e^4}{8\hbar^2} \approx 3,4 \text{ эВ}, \quad \alpha = -\frac{\mu e^2}{2\hbar^2} \approx -10^8 \text{ см}^{-1}, \quad \beta = \frac{\mu e^2}{8\hbar^2} \approx 10^8 \text{ см}^{-1}.$$

Поскольку для атома водорода

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

то главное квантовое число n рассматриваемого состояния равно 2; орбитальное квантовое число $l = 0$, так как ψ зависит только от r , т.е. описывает сферически симметричное состояние. Постоянную A определяем из условия нормировки:

$$4\pi \int_0^\infty |\psi|^2 r^2 dr = 1,$$

которое дает

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\hbar^2}{me^2} \right)^{-3/2}.$$

4.71. Решение. Для осциллятора в основном состоянии

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle = \langle E_{\text{пот}} \rangle = \frac{E}{2} = \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{1}{2} \frac{kA_0^2}{2}, \quad \text{где } k = \mu\omega^2,$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \mu = \frac{m(O)m(C)}{m(O) + m(C)} = 11,3 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

Для оценки требуемой температуры естественно считать, что при этой температуре в результате тепловых колебаний заметную роль начинают играть переходы молекулы в возбужденные вибрационные состояния, т.е. $k_B T \geq \hbar\omega$, $T \geq 3000 K$.

4.72. Решение. Классическая частота колебаний молекулы равна $\omega = \sqrt{k/\mu}$, где μ — приведенная масса двух атомов молекулы. Таким образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_e}{Ma^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\hbar\omega}{E_e} = \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{2}{E_e M}},$$

где M — масса атома. Для молекулы H_2 $a \simeq 0,74 \cdot 10^{-8}$ см, а $M = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г. Принимая характерную энергию возбуждения электронов $E_e \sim 5$ эВ, получаем для молекулы водорода $\hbar\omega/E_e \approx 0,05$, а для O_2 ($a \simeq 1,2 \cdot 10^{-8}$ см) — $\hbar\omega/E_e \sim 0,1$. Амплитуда нулевых колебаний для обоих случаев получается $\sim 0,1a$, т.е. $\sim 10^{-9}$ см.

4.73. Решение. Подставляя ψ в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi + \frac{\mu\omega^2 r^2}{2} \psi = E\psi,$$

определяем значения энергии E и констант α и β :

$$E = \frac{7}{2} \hbar\omega, \quad \alpha = -\frac{2\mu\omega}{3\hbar}, \quad \beta = \frac{\mu\omega}{2\hbar}.$$

Так как энергия трехмерного осциллятора $E_N = \hbar\omega(N + 3/2)$, то в нашем случае $N = 2$. Постоянную A определяем из условия нормировки:

$$4\pi \int_0^\infty |\psi|^2 r^2 dr = 1,$$

откуда следует, что

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{3/4}.$$

4.74. 1, 13.

4.75. Решение. Поскольку трем последовательным уровням в ротационной полосе двухатомной молекулы соответствуют квантовые числа l , $l + 1$ и $l + 2$, то условие задачи дает нам следующие соотношения:

$$E_{l+1} - E_l = 1 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \quad \text{и} \quad E_{l+2} - E_{l+1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}.$$

Используя формулу для уровней симметричного ротатора, получаем

$$\frac{E_{l+2} - E_{l+1}}{E_{l+1} - E_l} = \frac{(l+3)(l+2) - (l+1)(l+1)}{(l+2)(l+1) - (l+1)l} = 2,$$

откуда следует, что $l + 2 = 2(l + 1)$, или $l = 0$. А так как

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mathcal{J}}, \quad \text{то} \quad \frac{2\hbar^2}{2\mathcal{J}} = 10^{-4} \text{ эВ},$$

и в результате

$$\mathcal{J} = \frac{\hbar^2}{10^{-4} \text{ эВ}} \approx 7 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

4.76. Решение.

$$E_j = \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2\mathcal{J}} \simeq \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2m_p r^2},$$

так как протон вращается вокруг тяжелого брома.

$$\Delta E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{\hbar^2}{m_p r^2}, \quad r = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

4.77. Решение. Появление спутников при комбинационном рассеянии обусловлено процессами рассеяния фотонов с поглощением и испусканием колебательного кванта:

$$\hbar\omega_{\text{крас}} = \hbar\omega - \hbar\omega_v, \quad \hbar\omega_{\text{фиол}} = \hbar\omega + \hbar\omega_v, \quad \omega_v = 2\pi c/\lambda.$$

Интенсивность спутников пропорциональна заселенности уровней:

$$\frac{B_{\text{фиол}}}{B_{\text{крас}}} = \frac{N_1}{N_0} = e^{-\hbar\omega_v/k_B T} = e^{-1} = 0,3.$$

$$\mathbf{4.78.} \quad 7,45 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

6. Спин. Магнитные свойства атомов

$$\mathbf{4.81.} \quad L = 0,525 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с}; \mu = 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс.}$$

$$\mathbf{4.82.} \quad L_H = 0; \pm 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с}; \mu_H = 0; \pm 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс.}$$

Примечание. В единицах СИ момент количества движения измеряется в Дж·с; 1 эрг·с = 10⁻⁷ Дж·с, магнитный момент — в А·м²; 1 эрг/Гс = 10⁻³ А·м².

4.83. Решение. Отклонение каждого из пучков складывается из отклонения b_1 при пролете в поле магнита и отклонения b_2 при пролете от магнита к детектору. Таким образом, расстояние между пятнами $s = 2b_1 + 2b_2$. При этом

$$b_1 = \frac{\mu dB/dx}{2m} \left(\frac{l}{v_T} \right)^2, \quad b_2 = \frac{v_{\perp}}{v_T} L = \frac{\mu dB/dx}{m} \frac{lL}{v_T^2},$$

где m — масса атома, $v_T^2 = 3k_B T/m$, и таким образом,

$$s = 2\mu \frac{dB}{dx} \frac{l^2/2 + lL}{mv_T^2} = 2\mu \frac{dB}{dx} \frac{l(L + l/2)}{3k_B T} \approx 4 \text{ мм.}$$

$$\mathbf{4.84.} \quad d_{\text{max}} = \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{lL}{2W_K} \approx 0,9 \text{ см.}$$

4.85. Решение. Угол расхождения компонент пучка равен (см. решение зад. **4.83**):

$$\alpha = 2 \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = 2 \frac{2\mu_n L}{m_n v_{\parallel}^2} \frac{dB}{dx} = \frac{\mu_n L}{E} \frac{dB}{dx}.$$

Но по условию этот угол должен равняться дифракционному, т.е. $2\lambda/d$. Отсюда следует, что

$$\frac{dB}{dz} = \frac{2\lambda E}{\mu_n L d} = \frac{4\pi\hbar}{\mu_n L d} \sqrt{\frac{E}{2m_n}} \simeq 100 \text{ Гс/см.}$$

4.87. Решение. Пусть N_1 и N_2 — числа ядер фтора, магнитные моменты которых направлены по полю и против поля. Их разность $\Delta N = N_1 - N_2 = N_1 [1 - \exp(-2\mu_B/k_B T)] \approx N_1 \frac{2\mu_B}{k_B T} \approx N_0 \frac{\mu_B}{k_B T} \ll 1$, где N_0 — число ядер фтора в образце.

После выключения поля числа ядер с различными ориентациями магнитного момента сравниваются, т.е. ориентацию магнитного момента изменят $(N_1 - N_2)/2$ ядер, и образец получит момент импульса, равный

$$L = \frac{1}{2} \Delta N \frac{\hbar}{2} \simeq \frac{\hbar N_0 \mu_B}{4k_B T},$$

и поскольку $N_0 = 2N_A$, то

$$L = \frac{\hbar N_A \mu_B}{2k_B T} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{2k_B T L}{\hbar N_A B} = 2,63 \cdot 10^{-23} \text{ эрг} \cdot \text{Гс}^{-1} = 5,21 \mu_J,$$

где μ_J — ядерный магнетон.

4.88. Решение. Расщепление пучка нейтронов в однородном магнитном поле обусловлено переориентацией спинов нейтронов по полю и против него. Изменение энергии нейтрона при пересечении границы магнитного поля равно $\Delta W = \pm \mu B$, где знак «плюс» соответствует случаю, когда спин нейтрона параллелен полю, «минус» — когда он антипараллелен полю, а μ — проекция магнитного момента на направление поля, равная магнетону Бора μ_B . Кинетическая энергия связана с дебройлевской длиной волны λ соотношением $W_k = 2\pi^2 \hbar^2 / (m_n \lambda^2)$. Показатель преломления равен

$$n_{\pm} = (1 \pm \mu B / W_k)^{1/2} \simeq 1 \pm \mu B / (2W_k),$$

и для углов преломления на границе можно записать

$$\sin 60^\circ / \sin \phi_{\pm} = 1 / n_{\pm}.$$

Отсюда определяем угол расщепления $\theta = \phi_+ - \phi_-$. Окончательно получаем $\theta \approx (\sin 60^\circ / \cos \phi)(n_+ - n_-) = \mu B \tan 60^\circ / W_k = \sqrt{3} m_n \lambda^2 \mu B / (2\pi^2 \hbar^2) \approx$ мкрад (ϕ — средний угол преломления, т.е. $\phi \approx 60^\circ$).

4.89. а) 16, б) 32.

4.90. На 3 уровня.

4.91. Решение. Изменение энергии электрона в результате переориентации спина электрона равно

$$\Delta E = \frac{2\mu_B \mu_p}{r_1^3}, \quad \nu = \frac{2\mu_B \mu_p}{r_1^3 \hbar}, \quad \lambda = \frac{cr_1^3 \hbar}{2\mu_B \mu_p};$$

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}, \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e c} = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс},$$

$$\mu_J = \frac{e \hbar}{2m_p c} = 5,05 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс}.$$

В результате получаем, что $\lambda \approx 1 \text{ м}$.

4.92. Решение.

$$\Delta E \sim \frac{\mu_e \mu_p}{r_2^3}; \quad \mu_e = \frac{e \hbar}{2m_e c}; \quad m_p = 2,8 \frac{e \hbar}{2m_p c}; \quad r_2 = \frac{4 \hbar^2}{m_e e^2}.$$

$$\Delta E \sim \frac{e \hbar}{2m_e c} \cdot 2,8 \frac{e \hbar}{2m_p c} \frac{m_e^3 e^6}{2^6 \hbar^6} = \frac{0,7}{64} \frac{m_e}{m_p} m_e c^2 \alpha^4 \sim 10^{-8} \text{ эВ}.$$

В то же время естественная ширина линии $\delta E \sim \hbar / \tau \sim 10^{-7} \text{ эВ}$, т.е. ширина линии на порядок больше сверхтонкого расщепления. Следовательно, последнее нельзя обнаружить никаким прибором.

7. Атом в магнитном поле

4.93. 0,167 Å.

4.94. Три линии в обоих случаях.

4.95. Три линии в обоих случаях.

4.96. На 5 уровней, расстояние между которыми равно $\Delta E = e \hbar B / 2m_e c$.

4.97. Решение. (см. рис. 4.3'). В состоянии $^2D_{3/2}$ имеем $J = 3/2$, $L = 2$, $S = 1/2$, и следовательно:

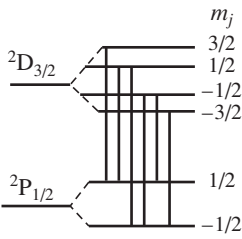


Рис. 4.3'

$$g = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 3}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{4}{5},$$

$$\Delta E = \frac{4}{5} \frac{e\hbar B}{2m_e c} m_j.$$

Для состояния $^2P_{1/2}$ $J = 1/2$, $L = 1$, $S = 1/2$, и

$$g = 1 + \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \Delta E = \frac{2}{3} \frac{e\hbar B}{2m_e c} m_j.$$

В результате

$$\Delta\omega = \left[\pm \frac{13}{15}, \pm \frac{11}{15}, \pm \frac{1}{15} \right] \frac{eB}{2m_e c}.$$

4.98. Решение. (см. рис. 4.4'). Расщепление за счет тонкой структуры $\Delta\lambda_{\text{тон}} = \lambda_2 - \lambda_1 = 38 \text{ \AA}$. Для зеемановского расщепления имеем: $\Delta\nu = \Delta E/h$, и

$$\Delta\lambda_{\text{зеем}} = \frac{c\Delta\nu}{\nu^2} = \frac{\Delta E\lambda^2}{2\pi\hbar c};$$

и так как $\Delta E \sim \mu_B B$, то

$$\Delta\lambda_{\text{зеем}} \sim \frac{\mu_B B \lambda^2}{2\pi\hbar c} \sim 10^{-1} \text{ \AA}.$$

Таким образом, $\Delta\lambda_{\text{зеем}} \ll \Delta\lambda_{\text{тон}}$, то есть поле слабое, эффект сложный.

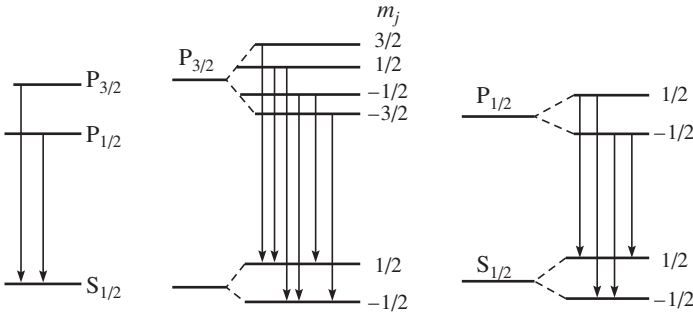


Рис. 4.4'

4.99. Решение. Чтобы обнаружить зеемановское расщепление, необходимо, чтобы оно было больше доплеровского уширения в результате теплового движения атомов и вращения звезды, то есть

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\mu_B B}{\hbar\omega} \geq \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{теп}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{вращ}} = \frac{v_{\text{теп}}}{c} + \frac{v_{\text{вращ}}}{c} \simeq \frac{v_{\text{теп}}}{c},$$

поскольку, как нетрудно убедиться:

$$v_{\text{вращ}} = \frac{2\pi R}{\tau} \ll v_{\text{теп}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{2m}}$$

(m — масса атома). В результате

$$B_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{3k_B T}{2m_p}} \approx 0,2 \text{ Тл.}$$

4.100. $\Delta E_{\max} = 3\mu_B B = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ эВ.}$

4.101. Решение. Факторы Ланде для состояний $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ равны соответственно $4/3$ и 2 . Основной уровень расщеплен на два подуровня, расстояние между которыми равно $\Delta E(S_{1/2}) = 2\mu_B B \approx 10^{-15} \text{ эрг}$, тогда как $k_B T \approx 0,7 \times 10^{-16} \text{ эрг}$, т.е. $\Delta E(S_{1/2}) \gg k_B T$. Следовательно, практически все атомы при такой температуре будут находиться на нижнем подуровне, и с учетом правил отбора в спектре поглощения будут наблюдаться три линии, смещенные относительно E_0 на $\Delta E = (-1, +1/3, +5/3)\mu_B B$.

4.102. Решение. $\nu = g\mu_B B/\hbar$, т.е. $g = \hbar\nu/\mu_B B$. Так как ядерный магнетон $\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс}$, то в результате получаем, что $g = 0,34$, а магнитный момент ядра (точнее — его максимальная проекция) $\mu = g\mu_N J = 0,85\mu_N$.

4.103. Решение. Согласно тому же правилу Хунда минимальной энергией обладает терм с максимальным значением S и максимально возможным при этом S значением L . Для двух электронов это можно объяснить тем, что при $S = 1$ пространственная часть их волновой функции антисимметрична, т.е. эффективно они находятся на большем расстоянии, чем в случае, когда $S = 0$, и следовательно, их потенциальная энергия кулоновского отталкивания меньше, чем для $S = 0$. Максимально возможное значение L для двух f -электронов, допустимое согласно принципу Паули, равно 5 (а не 6!). Таким образом, в основном состоянии рассматриваемого иона $S = 1$, $L = 5$, $J = 4$, и фактор Ланде $g = 4/5$. Резонансная частота $\nu = g\mu_B B/\hbar = 1,12 \cdot 10^9 \text{ Гц}$.

8. Свойства атомных ядер

4.104. $1,5 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$.

4.105. $n \sim 10^{44} \text{ нуклон/м}^3$; $\rho \sim 10^{24} \text{ Кг/м}^3$.

4.106. Неустойчиво, при распаде выделяется 0,16 МэВ.

4.107. Решение. При фиксированном A условие максимума энергии связи $\partial E_{\text{св}}/\partial Z = 0$ приводит к результату $Z_0 = A \cdot [2 + (2\gamma/\epsilon)A^{2/3}]^{-1} \approx A \cdot (2 + 0,15 \cdot 10^{-2} \cdot A^{2/3})^{-1}$. Для $A = 27$ $Z_0 = 12,64$, и поскольку Z принимает лишь целочисленные значения, наиболее связанным оказывается ядро с $Z = 13$, т.е. ^{27}Al . Это означает, что $M(^{27}\text{Al}) < M(^{27}\text{Mg})$, и так как для Mg атомный номер $Z = 12$, то ядро ^{27}Mg должно быть нестабильным и распадаться, переходя в ^{27}Al , т.е. претерпевать β^- -распад.

4.108. Решение. Возможность такого деления реализуется, если $M(A, Z) > 2M(A/2, Z/2)$, что соответствует $E_{\text{св}}(A, Z) < 2E_{\text{св}}(A/2, Z/2)$. Из этого неравенства следует, что $Z^2/A > 18$.

4.109. Решение. Энергия кулоновского взаимодействия протонов, находящихся с равной вероятностью внутри сферы радиуса R ядра с зарядовым числом Z , равна $E_{\text{кул}} = 3Z(Z-1)e^2/(5R)$. Эта величина и определяет разницу энергий связи, равную по условию 0,8 МэВ. Отсюда получается, что $R = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

4.110. $U_{\text{кул}} = 29 \text{ МэВ}$; $\Delta r = 3,56 \cdot 10^{-12} \text{ см}$.

4.111. Решение. Так как D представляет собой вероятность прохождения α -частицы сквозь барьер при одном ударе о стенку потенциальной ямы, то число ядер dN (из общего числа N α -активных ядер), распадающихся за время dt , можно записать следующим образом $|dN| = \lambda N dt = n D N dt$, где n — число ударов частицы о стенку ямы в единицу времени. Если скорость α -частицы внутри ямы — v_0 и радиус ядра — R , то $n \simeq v_0/R$. Имея в виду, что $m_\alpha v_0 R \simeq \hbar$, получим

$$\lambda \simeq \frac{\hbar D}{m_\alpha R^2}.$$

4.112. $Z = 90$; $A = 230$; ионий — изотоп тория (^{230}Th).

4.113. Решение. Оценим, какова должна быть энергия электрона, чтобы его дебройлевская длина волны была порядка размера ядра (имея в виду, что $pR_\alpha \sim \hbar$):

$$E_e = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ Дж},$$

а кулоновское притяжение составляет лишь

$$U_{\text{кул}} = Z_e^2/R_\alpha \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ эВ}.$$

Это означает, что электрон не может быть удержан кулоновскими силами в области, обладающей размерами порядка ядерных, иными словами, существование электронов в ядре невозможно.

4.114. Решение. Поскольку для фоторасщепления необходимо, чтобы энергия γ -кванта была не меньше энергии связи дейтрона, красная граница фоторасщепления равна этой энергии. Выражение для волновой функции дейтрона, приведенное в условии задачи, получается в приближении нулевого радиуса ядерных сил. Поэтому везде, кроме $r = 0$, эта волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера для сферически симметричного случая, а именно

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (r^2 \psi) = E \psi,$$

где $E < 0$ и $|E| = \varepsilon_{\text{св}}$, μ — приведенная масса протона и нейтрона. Подстановка $\psi = r^{-1} \chi$ приводит это уравнение к виду

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} - \alpha^2 \chi = 0,$$

где $\alpha^2 = 2\mu(-E)/\hbar^2 \approx m_p \varepsilon_{\text{св}}/\hbar^2$. Его решение, правильно ведущее себя на ∞ , имеет вид $\propto \exp(-\alpha r)$, что как раз и дает волновую функцию, приведенную в условии задачи. Таким образом, красная граница фоторасщепления дейтрона $W = \varepsilon_{\text{св}} = \hbar^2 \alpha^2 / m_p \approx 2 \text{ МэВ}$.

4.115. $\Delta E = \sqrt{2mc^2 E_0} = 0,8 \text{ МэВ}.$

4.116. $E_{\text{св}} = -U_0 - \frac{5\hbar}{2R_0} \sqrt{\frac{-2U_0}{m}} = 10,6 \text{ МэВ}.$

4.117. $\tau = \frac{\hbar}{\Delta E - 2\delta E_{\text{доп}}} = 10^{-17} \text{ с}.$

9. Ядерные реакции. Деление

4.119. $1,02 \text{ МэВ}.$

4.120. Решение. В с.ц.м. $p_\alpha = p_n$, $E_i = p_i^2/2m_i$, поэтому

$$\frac{E_\alpha}{E_n} = \frac{m_m}{m_\alpha} = \frac{1}{4}, \quad E_n + E_\alpha = Q, \quad \frac{E_n + E_\alpha}{E_n} = \frac{Q}{E_n} = \frac{5}{4}, \quad E_n = \frac{4Q}{5} = 14 \text{ МэВ}.$$

4.121. $\sigma_{\text{полн}} = 118$ барн/атом.

4.122. $\sigma_{ab} = \sigma_a \Gamma_b / \Gamma$.

4.123. $\sigma \simeq \pi(R + \lambda/2\pi)^2 = 2,9$ барн, где R — радиус ядра, а λ — длина волны налетающего нейтрона.

4.124. *Решение.* Поскольку $n\sigma \ll 1$, то $dN/dt = \nu\sigma n = 10^9$ событий/(см²·с).

4.125. *Решение.* Пусть на 1 см² поверхности счетчика падает N нейтронов, из которых при прохождении слоя dx вступают в реакцию (то есть регистрируются) $N\sigma ndx$, где n — концентрация атомов ³He в счетчике, иными словами, изменение потока нейтронов при прохождении расстояния dx составляет $dN = -N\sigma ndx$. Интегрируя это соотношение, получаем

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\sigma n \int_0^D dx,$$

или $N = N_0 \exp(-\sigma n D)$ — такое число нейтронов пройдет через счетчик, не зарегистрировавшись. Значит, зарегистрированная часть нейтронов составит $\varepsilon = (N_0 - N)/N_0 = 1 - \exp(-\sigma n D)$. Так как $n = 2,7 \cdot 10^{20}$ см⁻³, то $\sigma n D = 3,63$ и $\varepsilon = 1 - 2,6 \cdot 10^{-2} = 0,974$. Эта оценка показывает, что эффективность рассматриваемого счетчика близка к 1.

4.126. *Решение.* Реакция происходит в слое толщиной, равной длине свободного пробега α -частицы в веществе мишени. Поскольку выход $\eta \ll 1$ и в условии задачи речь идет о среднем сечении (вообще говоря, сечение меняется на длине пробега, так как меняется энергия α -частиц), то выход реакции $\eta = n_{\text{Al}} \sigma l_{\text{Al}}$, где n_{Al} — плотность атомов Al в мишени, σ — искомое сечение, l_{Al} — пробег α -частиц в Al. Таким образом, $\sigma = \eta / (n_{\text{Al}} l_{\text{Al}})$. Поскольку потери на ионизацию пропорциональны числу электронов в 1 см³ вещества, т.е. nZ , то $l_{\text{Al}}/l_{\text{B}} = (n_{\text{B}} Z_{\text{B}}) / (n_{\text{Al}} Z_{\text{Al}})$. В результате $\sigma = \eta Z_{\text{Al}} / (l_{\text{B}} n_{\text{B}} Z_{\text{B}}) \approx 4 \cdot 10^{-26}$ см².

4.127. *Решение.* Число реакций в слое dx на глубине x равно $dN = \sigma ndx$, где n — плотность ядер в мишени, сечение σ есть функция энергии, а энергия зависит от глубины x из-за ионизационных потерь, и таким образом, $\sigma = \sigma(x)$. Выход реакции

$$\eta = \frac{N}{N_0} = n \int_0^{x_0} \sigma(x) dx,$$

где x_0 — максимальная глубина проникновения пучка, т.е. глубина, на которой α -частица полностью теряет свою энергию. Переходя в интеграле от переменной x к энергии, получаем

$$\eta = n \int_0^E \frac{\sigma(E') dE'}{|dE'/dx|},$$

откуда

$$\frac{d\eta}{dE} = \frac{n\sigma(E)}{|dE/dx|} = \frac{n\sigma(E)E}{A} = cE^2 \quad \text{и} \quad \sigma(E) = \frac{AcE}{n}.$$

4.128. *Решение.* При низких энергиях реакция идет при нулевом орбитальном моменте, и поэтому полный момент импульса складывается из спинов ядер d и t . Так как их взаимные ориентации равновероятны, то столкновения могут происходить с $J = 3/2$ ($2J + 1 = 4$ различных состояния) и $J = 1/2$ ($2L + 1 = 2$ состояния). Поскольку реакция идет только с $J = 3/2$, то среднее сечение $\sigma = (4\sigma_{3/2} + 2\sigma_{1/2})/6 \approx 2\sigma_{3/2}/3$. При наложении магнитного поля, полностью

поляризующего ядра, для всех столкновений $J = 3/2$, и следовательно, среднее сечение возрастет в 1,5 раза.

4.129. Решение. Вероятность поглощения

$$w = 0,5\rho_3 N_A 2R\sigma_\nu = 0,5 \frac{3MN_A}{4\pi R^2} \sigma_\nu = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Средний свободный пробег нейтрино

$$l = \frac{1}{n\sigma_\nu} = \frac{A}{N_A \rho \sigma_\nu} = \frac{1}{6 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 10^{-26} \cdot 10^{-41}} \simeq 10^{43} \text{ см.}$$

4.130. Решение. Радиус ядра Pb $R \approx 8 \cdot 10^{-13}$ см, а радиус мюонной K -оболочки в ядре Pb $a_1 = a_B m_e / (m_\mu Z) \approx 3 \cdot 10^{-13}$ см. Следовательно, $a_1 < R$, т.е. мюон на K -оболочке практически находится внутри ядра. Короткое время жизни мюона на K -оболочке ядра по сравнению с временем жизни свободного мюона обусловлено его захватом ядром в результате реакции $\mu^- + p \rightarrow n + \bar{\nu}_\mu$. Время жизни мюона в ядре до его захвата протоном равно $\tau = (nv\sigma)^{-1}$, где σ — искомое сечение, v — скорость мюона в ядре, n — плотность протонов в ядре. Плотность протонов $n = Z / (4\pi R^3 / 3)$, где $R = r_0 A^{1/3}$ — радиус ядра. Таким образом, $\sigma = 4\pi r_0^3 A / 3\tau v Z$. Скорость мюона на K -оболочке $v = Ze^2 / \hbar$. Отметим, что эта формула следует из представления о заряде ядра как о точечном, что в данном случае неверно и поэтому приводит лишь к грубой оценке; рассчитанная так скорость $v \approx 1,8 \cdot 10^{10}$ см/с, что составляет около 2/3 скорости света, т.е. скорость существенно релятивистская. В результате для сечения получается оценка $\sigma \sim 10^{-41}$ см².

4.131. Решение. Оценка сечения здесь во многом аналогична оценке предыдущей задачи. Отличие состоит в том, что, во-первых, на K -оболочке здесь находятся два электрона и, во-вторых, радиус K -оболочки для электрона $a_1 = a_B / (Z - 1)$ (поскольку $Z - 1$ представляет собой эффективный заряд для K -электрона с учетом действия пространственного заряда других электронов). Таким образом, $a_1 \approx 3 \cdot 10^{-10}$, что существенно больше радиуса R ядра ^{37}Ag , равно $\approx 4,3 \cdot 10^{-13}$. Следовательно, электрон находится внутри ядра с вероятностью $W \ll 1$. В результате для времени жизни получаем $\tau \sim (2nv\sigma W)^{-1}$ (вместо $(nv\sigma)^{-1}$ предыдущей задачи), где, как и раньше, $n = 3Z / (4\pi R^3)$, $v = e^2(Z - 1) / \hbar \approx 3,7 \cdot 10^9$ см/с. Вероятность нахождения электрона в ядре равна

$$W = 4\pi \int_0^R r^2 |\psi(r)|^2 dr,$$

где $\psi = (\pi a_1^3)^{-1/2} \exp(-r/a_1)$ — волновая функция K -электрона. Таким образом, $W = 4R^3 / (3a_1^3)$, и $\sigma = (2n\tau v W)^{-1} = (\pi a_1^3) / (2Z\tau v) \approx 10^{-46}$ см².

4.132. Условие отсутствия заметного поглощения: $n\sigma L \ll 1$, т.е. $L \ll (n\sigma)^{-1}$, где n — плотность ядер Sn, «принимающих участие» в процессе поглощения, которая равна $n = f\varepsilon\rho N_A / A$; здесь N_A — число Авогадро, A — молекулярный вес BaSnO_3 , равный 304. Самопоглощение мессбауеровских γ -квантов — резонансный процесс, описываемый одноканальной формулой Брейта-Вигнера:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

В резонансе $\sigma = 4\pi/k^2 = 4\pi\hbar^2 c^2 / E_\gamma^2$, и таким образом, получаем, что

$$L \ll \frac{AE_\gamma^2}{4\pi\hbar^2 c^2 f\varepsilon\rho N_A} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

4.133. Ослабление пучка частиц при прохождении слоя вещества толщины x происходит по экспоненциальному закону: $j(x) = j_0 \exp(-n\sigma x)$. Для выполнения поставленного условия необходимо, чтобы $j(h)/j_0 = \exp(-n\sigma h) \geq 0,1$, где $h = 1$ мм, т.е. сечение не должно превосходить $(nh)^{-1} \ln 10 = 2,3 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2 = 2300$ бн. Поскольку в нерезонансной области энергий сечение захвата нейтронов подчиняется закону $1/v$, то $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{E_0/E}$, где $\sigma_0 = 5400$ бн, а $E_0 = 0,025$ эВ. Следовательно, энергия нейтронов должна быть не меньше $E = E_0 \sigma_0^2 / \sigma^2 = 0,14$ эВ.

4.134. Для осуществления такой реакции необходимо сблизить ядра урана так, чтобы они слились, т.е. преодолеть кулоновское отталкивание, потенциальная энергия которого, равная $Z^2 e^2 / R$ (R — радиус ядра урана), играет роль пороговой энергии реакции. Следовательно, пороговая кинетическая энергия налетающего ядра урана (предполагается, что второе ядро покоится) равна $Mv^2/2 = 2Z^2 e^2 / R$ и $v = 2Ze\sqrt{MR} \approx 7 \cdot 10^7$ м/с.

4.135. Решение. Для спонтанного деления $dN_s/dt = \lambda N$, а для вынужденного — $dN_i/dt = \sigma N \Phi$. Заметить превышение актов вынужденного деления над фоном спонтанного можно будет, если дисперсия фона порядка эффекта, т.е.

$$\Phi \simeq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{Nt}} = 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

4.136. Решение. Из 2,5 рождающихся в процессе замедления нейтронов в среднем захватывается 1,25 нейтронов, 1 нейтрон необходим для работы реактора в стационарном режиме, а 0,25, т.е. 10% уходит из активной зоны.

4.137. Решение. $P(t) = P(0)k^{t/\tau} = P(0) \exp\left(\frac{t}{\tau} \ln k\right) \approx P(0) \exp(\rho t / \tau)$;
 $T = \tau / \rho$.

4.138. Решение. $P = Q\bar{\sigma} \bar{v} n^2 / 4 = 4,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} n^2 \bar{\sigma} \bar{v}$ [Вт/см³].

При $T = 1$ кэВ $P = 3,87 \cdot 10^{-5}$ Вт/см³, $W = 19,35$ кВт.

При $T = 10$ кэВ $P = 0,774$ Вт/см³, $W = 387$ МВт.

10. Элементарные частицы

4.139. $n = 10$.

4.140. 0,98 ГэВ.

4.141. 5,6 ГэВ.

4.144. Возможна только реакция 2.

4.145. Запрещены реакции 1, 3, 5.

4.146. Решение. Среднее время жизни $\tau \simeq \hbar / \Gamma \simeq 3 \cdot 10^{-24}$ с. Для определения массы рассмотрим релятивистский инвариант $S = E^2 - p^2 c^2$ (E и p — полная энергия и полный трехмерный импульс взаимодействующих частиц) в лабораторной системе и системе центра масс:

$$m_{\Delta}^2 c^4 = E_{\Delta}^2 - p^2 c^2 = (m_p c^2 + m_{\pi} c^2 T_{\pi})^2 - [(m_{\pi} c^2 + T_{\pi})^2 - m_{\pi}^2 c^4],$$

то есть

$$m_{\Delta} c^2 = [(m_p + m_{\pi})^2 c^4 + 2 m_{\pi} c^2 T_{\pi}]^{1/2} = 1232 \text{ МэВ}.$$

4.147. $\sigma = 4\pi/k = 7$ мбн.

4.148. $T_{\text{пор}} = 1,6$ ГэВ.

4.149. Решение. Задача аналогична задаче о позитронии. Разность энергий между первым возбужденным и основным состояниями $\Delta E = (\mu q^4 / 2 \hbar^2) \times \times (1 - 1/2^2) = 3q^4 \mu / 8 \hbar^2$. Здесь q — эффективный «сильный заряд» кварка, μ — приведенная масса системы $c\bar{c}$, т.е. $\mu = m_c / 2$, а $m_c = E_{\psi} / 2 = 1,55$ МэВ, и таким

образом, $\Delta E = 3m_c q^4 / 16\hbar^2$. Характерным размером системы $c\bar{c}$ (так называемого чармония) в таком подходе будет радиус первой боровской орбиты $a = \hbar^2 / \mu q^2 = 2\hbar^2 / m_c q^2$, где $q^2 = 4\hbar(\Delta E / 3m_c)^{1/2}$. Таким образом, $a = \hbar / 2\sqrt{3m_c \Delta E} \simeq 2 \cdot 10^{-14}$ см.

4.150. Решение. Каон K^0 имеет странность $S = +1$. Следовательно, в своем составе он должен содержать антикварк $\bar{s}$, для которого $S = +1$ и $Q = 1/3$. Чтобы получить комбинацию с кварком, которая имела бы $Q = 0$, возможен единственный вариант: $K^0 = d\bar{s}$.

4.151. $\Xi = uss$, $\Lambda^0 = uds$.

4.152. Решение. Поскольку $B = 1$, то частица должна состоять из трех кварков (не антикварков!). Для выполнения условия $I_3 = 0$ возможны две комбинации: uds и sss , из которых первая не подходит, так как для нее $q = 0$, а для второй $q = -1$, что и требуется. Таким образом, кварковый состав частицы — sss , что соответствует Ω^- -гиперону, для которого странность $S = -3$, а гиперзаряд $Y = B + S = -2$.

4.153. $S = 0$, $Y = -1$; частица — антинейтрон ($\bar{u}\bar{d}\bar{d}$).

4.154. Такие распады запрещены, поскольку: 1) $\Delta S = 2$; 2) $\Delta S = 2$; 3) $m_n < m_p + m_\mu$; 4) не сохраняются лептонные заряды L_e и L_μ ; 5) не сохраняются барионный (B) и лептонный (L) заряды; 6) не сохраняется L_μ .

4.155. Решение. а) Из сохранения L_μ следует, что в процессе взаимодействия ν_μ может перейти в $\mu^- + W^+$, а W^+ должен быть поглощен одним из кварков протона ($p = uud$). W^+ может быть поглощен d -кварком ($d + W^+ \rightarrow u$) и не может поглощаться u -кварком, так как в этом случае появился бы кварк с зарядом $5/3$, а таких кварков нет. В результате $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + (uuu)$, т.е. $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + \Delta^{++}$. б) В этом случае происходит то же самое с той лишь разницей, что $n = udd$, и в конечном состоянии получается система uud (протон), т.е. $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + p$. Поскольку в нейтроне два d -кварка, то вероятность реакции б) в два раза больше, чем реакции а). в) Рассуждения аналогичны: $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \mu^+ + W^-$, и $u + W^- \rightarrow d$; в результате $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$. г) $\bar{\nu}_\mu + (udd) \rightarrow \mu^+ + (ddd)$, $\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow \mu^+ + \Delta^-$, и вероятность этой реакции в два раза меньше предыдущей. Таким образом, $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_v : \sigma_r = 1 : 2 : 2 : 1$.

4.156. Решение. Так как в сильных взаимодействиях при больших энергиях протон и нейтрон ведут себя практически одинаково, то можно предположить, что сечения взаимодействия между нестранными кварками одинаковы, т.е. $\sigma(uu) = \sigma(ud) = \sigma(dd) = \sigma_0$. Будем считать, что при этих энергиях сечение кварк-антикварк равно сечению кварк-кварк, что также оправдывается экспериментальными данными о примерном равенстве сечений частица-частица и частица-античастица при энергиях $E \gg mc^2$. Тогда сечение $\sigma(pp) = 9\sigma_0$, а $\sigma(\pi p) = 6\sigma_0 \approx 27$ мбн. Для оценки сечений ΛN и ΞN делаем аналогичные предположения о взаимодействии странных кварков с нестранными: $\sigma(su) = \sigma(sd) = \sigma(\bar{s}u) = \dots = \sigma_1$. В соответствии с этим $\sigma(KN) = 3\sigma_0 + 3\sigma_1$, $\sigma(\Lambda N) = 6\sigma_0 + 3\sigma_1$. Поскольку $\sigma_0 = 40/9$ мбн, а $\sigma_1 = (19 - 40/3) = 17/9$ мбн, то $\sigma(\Lambda N) \approx 32$ мбн, и $\sigma(\Xi N) \approx 25$ мбн.

4.157. $\mu_\Omega \approx 2\mu_\pi$, где μ_π — ядерный магнетон.

4.158. $u + \bar{d} \rightarrow W^+$, $(E + \bar{E})_{\text{пор}} = 515$ ГэВ.

Г л а в а V

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Элементы молекулярно-кинетической теории

5.1. Указание. Коэффициенты α , λ , β определяются выражениями

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P_0} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad \beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

Кроме этого, коэффициенты α и λ часто определяются такими выражениями:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V.$$

Для твердых и жидких тел между этими определениями по существу нет разницы. Первое определение обладает тем преимуществом, что для идеальных газов величины α и λ оказываются постоянными, тогда как при втором определении они меняются обратно пропорционально абсолютной температуре T . Величина β называется также изотермической сжимаемостью вещества.

5.2. $\alpha = 1/T_0$; $\lambda = 1/T_0$; $\beta_T = 1/P$; $K_T = P$. Здесь T_0 — абсолютная температура, соответствующая нулевой температуре по шкале Цельсия. Используя второе определение коэффициентов α и λ приведенное в указании к решению задачи **5.1**, мы получили бы $\alpha = \lambda = 1/T$, т.е. при таком определении коэффициенты α и λ для идеальных газов не были бы постоянными.

5.3. $P = R\Delta T/\Delta V = 8,3 \cdot 10^3$ Па; $V = R\Delta T/\Delta P = 0,83$ м³; $T = PV/R = R(\Delta T)^2/\Delta P\Delta V = 830$ К.

5.4. Увеличить натяжение на 40 Н.

Указание. По аналогии с формулой из п. 2 можно записать соотношение $(\partial l/\partial T)_f (\partial f/\partial l)_T (\partial T/\partial f)_l = -1$.

5.5. $\lambda = 46$ К⁻¹.

5.6. $T = 1250$ К. Расчет проведен в предположении, что вся вода превратилась в пар. В нашем случае это заведомо справедливо, так как при температуре, превышающей $t_r = 374,1$ °С (критическую температуру воды), водяной пар не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

5.7. $P = \rho RT/\mu = \rho_0 RT/n\mu = 2,5 \cdot 10^6$ Па.

5.8. Можно, так как разность масс составляет около 140 мг > m_0 .

5.9. Решение. Плотность газа, составляющего шаровую молнию, равна плотности воздуха, так как молния свободно плавает в воздухе. Равны, очевидно, и давления. Следовательно, молярные массы вещества молнии и воздуха обратно пропорциональны их абсолютным температурам, и мы можем найти молярную массу вещества молнии: $\mu = \mu_0 T_0/T = 86$ г/моль, где $\mu_0 = 29$ г/моль — молярная масса воздуха. Искомое число молекул воды, связанных с ионом азота, найдем из соотношения $n = (\mu - \mu_N)/\mu_v = 4$, где $\mu_N = 14$ г/моль — молярная масса ионов азота (практически равная молярной массе атомарного азота), $\mu_v = 18$ г/моль — молярная масса воды.

5.10. Решение. Применяя к воздуху, занимающему объем комнаты, при температурах $t_1 = 10$ °С и $t_2 = 20$ °С уравнение газового состояния, имеем

$$\Delta m = \frac{\mu PV}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 2,26 \text{ кг}.$$

Здесь T_1 и T_2 — абсолютные температуры, соответствующие температурам по Цельсию t_1 и t_2 .

5.11. Решение. При установившемся режиме горения в камере двигателя будет такое давление, при котором скорость истечения массы газа из сопла равна скорости сгорания пороха: $\alpha PS = AP^n$, где α — некоторая постоянная; отсюда $P^{1-n} = A/\alpha S$, $P = (A/\alpha S)^{1/(1-n)}$. Отношение давлений в камерах $P_2/P_1 = (S_1/S_2)^{1/(1-n)}$. По условию $S_1/S_2 = 2$ и $P_2/P_1 = 4$. Таким образом, $4 = 2^{1/(1-n)}$, $1/(1-n) = 2$, $n = 1/2$.

$$\mathbf{5.12.} \quad t = 8 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$\mathbf{5.13.} \quad m = \frac{\mu PS l}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

5.14. Решение. Первоначальное давление P в первой половине сосуда равно сумме парциальных давлений аргона и водорода:

$$P = P_a + P_b = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_b}{\mu_b} \right).$$

После окончания диффузии

$$P' = P'_a + P'_b = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_b}{2\mu_b} \right),$$

так как водород теперь занимает объем $2V$. После несложных преобразований найдем $m_a/m_b = 10$.

5.15. Массы гелия и водорода одинаковы.

5.16. Атомов азота вдвое меньше, чем атомов водорода.

5.17. Давление выросло в 3 раза.

5.18. Решение. Если бы диссоциации CO_2 не было, давление в сосуде оказалось бы равным $P_0 = (RTm)/(V\mu) = 98 \text{ кПа}$, где $\mu = 44 \text{ г/моль}$ — молярная масса CO_2 . На каждые две диссоциированные молекулы CO_2 приходится две молекулы CO и одна молекула O_2 . Если степень диссоциации CO_2 равна α , то в сосуде будет $\nu_1 = (1 - \alpha)m/\mu$ молей CO_2 , $\nu_2 = \alpha m/\mu$ молей CO и $\nu_3 = \alpha m/2\mu$ молей O_2 .

Применяя закон Дальтона для смеси газов, найдем полное давление P в сосуде:

$$P = \frac{RT(1 - \alpha)m}{V\mu} + \frac{RT}{V} \frac{\alpha m}{\mu} + \frac{RT}{V} \frac{\alpha m}{2\mu} = (1 + \alpha/2)P_0.$$

Отсюда следует, что $1 + \alpha/2 = P/P_0 = 1,1$; $\alpha = 0,2$, т.е. 20%.

$$\mathbf{5.19.} \quad \alpha_2 = 2 \left[\frac{T_1 \nu_1}{T_2 \nu_2} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) - 1 \right] = 0,75.$$

$$\mathbf{5.20.} \quad N = N_A PV/RT = 2,688 \cdot 10^{22}.$$

$$\mathbf{5.21.} \quad N = \frac{m}{\mu} N_A \frac{V_a}{V} = 10^{12}.$$

5.22. Решение. Число радиоактивных частиц во всей атмосфере: $N = MN_A/A = 2,5 \cdot 10^{24}$. Масса атмосферного воздуха $M_0 = P_0 \cdot 4\pi R^2/g = 4,6 \cdot 10^{18} \text{ кг}$. Число молекул воздуха во всей атмосфере: $N_0 = M_0 N_A/\mu = 9,6 \cdot 10^{43}$. При нормальных условиях число молекул в объеме $V = 1 \text{ дм}^3$ воздуха легче всего найти из условия, что 1 моль ($6,02 \cdot 10^{23}$ молекул) воздуха занимает объем $V_0 = 22,4 \text{ дм}^3/\text{моль}$, $n_0 = N_A/V_0 = 2,7 \cdot 10^{22} \text{ дм}^{-3}$. Зная полное число молекул воздуха и радиоактивных частиц найдем число частиц в объеме $V = 1 \text{ дм}^3$: $n_0 N/N_0 = 700 \text{ дм}^{-3}$. Итак, одна атомная бомба дает 700 радиоактивных частиц на каждый человеческий вдох!

5.23. Моль газа занимает объем $V = RT/P$. На одну молекулу приходится объем $V_1 = RT/PN_A = k_B T/P$. Среднее расстояние между молекулами, таким

образом, $l = (k_B T / P)^{1/3}$. При температуре $t = 100^\circ \text{C}$ давление насыщенного водяного пара $P = 10^5$ Па. Окончательно получаем $l = 3,7 \cdot 10^{-9}$ м.

5.24. $m = \frac{\tau S \kappa}{ql} (t_1 - t_2) = 54$ г, где $q = 80$ кал/г $= 335$ Дж/г — удельная теплота плавления льда.

$$\mathbf{5.25.} \quad t(R) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln(R_2/R_1)} \ln(R/R_1).$$

$$\mathbf{5.26.} \quad t(R) = \frac{t_2 - t_1}{R_1 - R_2} \frac{R_1 R_2}{R} + \frac{t_1 R_1 - t_2 R_2}{R_1 - R_2}.$$

$$\mathbf{5.27.} \quad z = Sv N_A P / RT = 6 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}.$$

5.28. $\lambda = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{RT_0}{N_A P_0 \pi d^2} = 8,75 \cdot 10^{-8}$ м, где давление $P_0 = 10^5$ Па, температура $T_0 = 273$ К.

Примечание. Табличная длина пробега при таких условиях $\lambda = 6,20 \cdot 10^{-8}$ м. Расхождение в основном связано с тем, что в расчете, приводящемся к формуле, указанной выше, все молекулы, кроме той, за движением которой мы следим, считаются неподвижными.

Подробный анализ показывает, что учет относительного движения молекул приводит к изменению длины свободного пробега в $1/\sqrt{2}$ раз. Помножив полученный результат на этот множитель, окончательно имеем $\lambda = 6,19 \cdot 10^{-8}$ м.

$$\mathbf{5.29.} \quad z = 4 \sqrt{\frac{\pi}{m k_B T}} P d^2 \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

$$\mathbf{5.30.} \quad z = \frac{\pi d^2 \bar{v} n^2}{\sqrt{2}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{P^2 d^2}{(k_B T)^{3/2}} \approx 6 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-3}.$$

5.31. Решение. Средняя высота, на которой летают тела, и толщина слоя h гораздо меньше радиуса Земли $R_3 \approx 6400$ км. Поэтому объем слоя можно считать равным $V \approx 4\pi R_3^2 h$. Принимая сечение равным $\sigma \approx l^2$, получаем «длину свободного пробега» $\lambda \approx 1/n\sigma \approx V/Nl^2$.

Относительные скорости тел по порядку величины равны первой космической ≈ 8 км/с. Время «свободного пробега» — время жизни отдельного тела — равно $\tau_1 \approx \lambda/v \approx V/vNl^2 \approx 4\pi R_3^2 h/vNl^2 \approx 10^5$ лет.

Столкновения во всем заселенном слое придется ждать в $N/2$ раз меньшее время, т. е. $\tau \approx 200$ лет.

$$\mathbf{5.32.} \quad \tau \approx r N^{3/2} / v.$$

$$\mathbf{5.33.} \quad z \propto T^{-1/2}; \lambda \propto T.$$

$$\mathbf{5.34.} \quad z \propto P; \lambda \propto P^{-1}.$$

$$\mathbf{5.35.} \quad T(x) = \left[\frac{x}{L} \left(T_2^{3/2} - T_1^{3/2} \right) + T_1^{3/2} \right]^{2/3}.$$

$$\mathbf{5.36.} \quad \Delta T = \left(\frac{3q\sqrt{T_0}}{4\pi\kappa_0} \ln \frac{R}{r} + T_0^{3/2} \right)^{2/3} - T_0.$$

$$\mathbf{5.37.} \quad q = \frac{8\pi}{3} \kappa_0 T_0 R.$$

5.38. Решение. Рассчитаем профиль температуры в сосуде. Так как боковые стенки не пропускают тепло, через любое сечение сосуда проходит один и тот же поток тепла. Это условие мы можем записать в следующем виде: $q \propto \kappa(x)(dT/dx) = \text{const}$, где x — расстояние от дна. Коэффициент теплопроводности пропорционален средней тепловой скорости молекул $\langle v \rangle$ или $\kappa \propto \sqrt{T}$. Значит, $\sqrt{T}dT = A dx$ (A — некоторая

константа) или $T^{3/2} = A_1 x + B$, где A_1 и B — новые константы. Подставляя значения $T(x=0) = T_0$ и $T(x=l) = 4T_0$ (l — длина сосуда), получаем $T = T_0(1+7x/l)^{2/3}$. Пусть сечение сосуда равно S . Тогда массу газа, приходящуюся на элемент длины dx , можно записать в виде $dm = \rho S dx = (\mu P/RT) S dx$, и условие сохранения массы газа в сосуде приводит к следующему соотношению:

$$\frac{P_0 l}{T_0} = \frac{P}{T_0} \int_0^l \frac{dx}{(1+7x/l)^{2/3}} = \frac{3Pl}{7T_0}.$$

Отсюда $P = 7P_0/3$.

$$5.39. \frac{V}{V_0} = \frac{13}{3}.$$

$$5.40. l = L \frac{\sqrt{T_1 T_2} - T_1}{T_2 - T_1}.$$

$$5.41. \kappa_1/\kappa = (D_1/D)(C_{V1}/C_V)(\mu/\mu_1) = 3 \cdot (3/5) \cdot 2 = 3,6.$$

$$5.42. D_1/D = (\eta_1/\eta)(T_1/T)(\mu/\mu_1) = 16.$$

$$5.43. \kappa/\kappa_0 = (C_V/C_{V0})(\sigma_0/\sigma)(T/T_0)^{1/2} \cdot (\mu_0/\mu)^{1/2} = 2,7.$$

$$5.44. D/D_0 = (\sigma_0/\sigma)(T/T_0)^{3/2}(\mu_0/\mu)^{1/2} = 6.$$

5.45. *Решение.* Запишем выражение для коэффициента теплопроводности в форме $\kappa = nm(C_V/\mu)(v/3n\sigma)$. Очевидно, что $m_1/\mu_1 = m/\mu$, и для отношения коэффициентов имеем $\kappa_1/\kappa = (C_{V1}/C_V)(v_1/v)(\sigma/\sigma_1)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1/\sigma &= (\kappa/\kappa_1)(v_1/v)(C_{V1}/C_V) = (\kappa/\kappa_1)\sqrt{(T_1/T)(\mu/\mu_1)}(C_{V1}/C_V) = \\ &= (1/3) \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (3/5) = 2\sqrt{2}/5 \approx 0,564. \end{aligned}$$

$$5.46. \sigma_1/\sigma = (D/D_1)\sqrt{\mu/\mu_1}\sqrt{(T_1/T)^3} = (1/16)8\sqrt{2} = 0,707.$$

5.47. $T^2 = (T_0)^2 + q(d^2 - x^2)/A$, где x — расстояние от средней плоскости шины.

5.48. *Решение.* Уравнение теплопроводности при наличии источников тепла с плотностью мощности q для сферически симметричных задач имеет вид

$$\rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q.$$

В стационарном случае $\partial T/\partial t = 0$ и после однократного интегрирования записанного уравнения по радиусу ($q = \text{const}$) получим

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\kappa} r + \frac{C}{r^2}.$$

Постоянная интегрирования C должна равняться нулю, так как в противном случае в центре шара мы получили бы бесконечное значение для производной dT/dr . Интегрируя вторично с учетом граничного условия $T = T_0$ при $r = R$, найдем

$$T = T_0 + \frac{q}{6\kappa} (R^2 - r^2).$$

Температура в центре шара

$$T_{\text{ц}} = T_0 + \frac{qR^2}{6\kappa} = 790 \text{ К}.$$

$$5.49. \varphi = \frac{\pi \eta \omega R^4}{2fh} = 1,4 \text{ рад} \approx 80^\circ.$$

2. Элементы термодинамики

5.50. Температура выросла в отношении $5/3$.

Указание. Процесс неравновесный, поэтому пользоваться уравнением адиабаты Пуассона нельзя. Необходимо применить первое начало термодинамики, т.е. закон сохранения энергии.

$$5.51. T_x = (28/25)T_0.$$

$$5.52. T_x = (54/49)T_0.$$

5.53. Решение. Допустим, в вакуумную систему перешло из атмосферы ν молей воздуха, занимавших при комнатной температуре T_0 и атмосферном давлении P_0 объем V_0 . При этом окружающие порции воздуха совершают работу $A = P_0 V_0$. Пренебрегая теплообменом за время заполнения системы, запишем баланс энергии:

$$\nu C_V T = \nu C_V T_0 + P_0 V_0 = \nu(C_V T_0 + R T_0) = \nu C_P T_0.$$

Отсюда получаем температуру воздуха T сразу после заполнения системы, т.е. при атмосферном давлении, $T = \gamma T_0$. Процесс последующего охлаждения воздуха до комнатной температуры T_0 происходит при постоянном объеме. При этом давление, очевидно, упадет в γ раз.

Итак, $P = P_0/\gamma = 5P_0/7 \approx 0,7P_0$.

5.54. 1. Газ охлаждается при расширении, причем его температура пропорциональна $1/V$.

2. $C = C_V - R$. При расширении от газа отводится тепло.

5.55. 1. Газ при расширении нагревается, причем его температура пропорциональна $\sqrt{V}$.

2. $C = C_P + R$. При расширении к газу должно подводиться тепло.

5.56. $A = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{P_2 V_2}{n-1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1} - 1 \right]$, в частности, для адиабатического процесса $A_{ад} = A$, если заменить показатель политропы n на показатель адиабаты γ . Для изотермического процесса $A_{из} = P_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$, где $P_2 V_2 = RT$;

$$5.57. VT^{(C_V - C_0)/R} e^{-\alpha T/R} = \text{const.}$$

$$5.58. VT^{C_{V_0}/R} e^{\alpha T^2/2R} = \text{const.}$$

$$5.59. C_V = 2\alpha T^2.$$

$$5.60. T(V) = V(P_0 - V P_0/V_0)/R; T_{\max} = P_0 V_0/4R \text{ при } V = V_0/2.$$

5.61. Решение. Согласно первому началу термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$, т.е. $C \Delta T = C_V \Delta T + P \Delta V$. Отсюда

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Из уравнения состояния моля газа $PV = RT$ имеем $P \Delta V + V \Delta P = R \Delta T$ или $P + V(\Delta P/\Delta V) = R(\Delta T/\Delta V)$, откуда

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{R}{P + V(\Delta P/\Delta V)}.$$

Подставляя сюда выражения для нашего процесса $P = P_0 - V(P_0/V_0)$ и $(\Delta P/\Delta V) = -(P_0/V_0)$, получаем окончательно

$$C = C_v + R \frac{V_0 - V}{V_0 - 2V}.$$

5.62. Решение. По определению теплоемкости $\Delta Q = C \Delta T$. До значения $V_x = V_0/2$ температура растет, т.е. $\Delta T > 0$, и теплоемкость $C > 0$; значит, тепло подводится к газу. Начиная с этого значения объема температура убывает.

Однако именно в этой точке меняет знак теплоемкость. Далее $C < 0$ и $\Delta T < 0$, а значит, тепло продолжает поступать к газу. Начиная с точки $V_y = 4V_0/7$ теплоемкость вновь становится положительной, а температура продолжает уменьшаться. Следовательно, именно здесь начинается отвод тепла от газа.

Примечание. В точке $V_x = V_0/2$ прямая AB является касательной к проходящей через эту точку изотерме, а в точке $V_y = 4V_0/7$ она же служит касательной к адиабате. Между этими точками температура понижается, но прямая идет более полого, чем пересекаемые ею адиабаты. Это означает, что температура понижается медленнее, чем на адиабате, и следовательно, тепло продолжает поступать к газу. И только после точки V_y прямая идет круче адиабат. При этом газ охлаждается быстрее, чем в отсутствие теплообмена; следовательно, начинается отвод тепла.

Отметим еще, что значение V_y зависит от величины C_V .

$$5.63. T_2 = T_1 - \frac{\mu v^2}{2C_P} = 194 \text{ К}; P_1 = P_2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 3,3 \text{ атм, где } \mu —$$

молярная масса, C_P — молярная теплоемкость, P_2 — атмосферное давление.

$$5.64. \gamma = 1,41.$$

$$5.65. T = 4 \frac{\gamma_{\text{воз}} \mu_{\text{He}}}{\gamma_{\text{He}} \mu_{\text{воз}}} T_0 = 127 \text{ К}.$$

$$5.66. v = v_{\text{зв}} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

$$5.67. \eta = 4/15 \text{ (используйте решение зад. 5.62).}$$

$$5.68. \eta = 6/67 \text{ (используйте решение зад. 5.62).}$$

$$5.69. K = \kappa + 1.$$

$$5.70. Q = ET_2/(T_1 - T_2)\tau = 467 \text{ Дж/с}.$$

5.71. Используя условие теплового баланса, получаем

$$(T_x - T_2)/(T_1 - T_2) = \eta T_x/(T_x - T_2).$$

Отсюда $T_x = 299 \text{ К}$, т.е. $t_x = 26^\circ \text{С}$.

5.72. Из уравнения адиабаты в форме $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ можно получить, что $T_2 = T_1 n^{1-\gamma}$. Кроме того, $T_2 = nT_3$. Тепло подводится на изохоре, а отводится на изобаре. Для КПД получаем

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{31}} = 1 - \frac{C_P(T_2 - T_3)}{C_V(T_1 - T_3)} = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{n^\gamma - 1}.$$

$$5.73. \eta = 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}.$$

$$5.74. \eta = 1 - \frac{n_1^\gamma - 1}{\gamma n^{\gamma-1}(n_1 - 1)}.$$

$$5.75. \eta = 1 - \frac{1}{n^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

$$5.76. n_0 = \left[\frac{n^{\gamma-1}(n_1^\gamma - 1)}{\gamma(n_1 - 1)} \right]^{1/(\gamma-1)} = 19,5.$$

$$5.77. A = 250 \text{ Дж}.$$

$$5.78. \eta_p/\eta_r = 0,44.$$

$$5.79. N = 7 \text{ кВт}.$$

$$5.80. m = 7200 \text{ тонн}.$$

$$5.81. \Delta S = R \ln 2; \Delta T = (2^{\gamma-1} - 1)T_0 \approx 0,32T_0.$$

$$5.82. \Delta S = R \ln \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1P_2} + 2R \ln 2; \text{ если газы одинаковые, второе слагаемое}$$

отсутствует.

$$5.83. \Delta S = C_V \ln[9n/2(n+1)^2] + R \ln[4n/(n+1)^2] = 7,46 \cdot 10^{-2} R = 0,62 \text{ Дж/К.}$$

$$5.84. \Delta S = C_V \ln[27n^2/4(n+1)^2] + R \ln[8n^2/(n+1)^3] = 7,22 \cdot 10^{-2} R = 0,6 \text{ Дж/К.}$$

$$5.85. \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}.$$

$$5.86. \eta = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}.$$

5.87. *Решение.* Так как $\delta Q = T dS$, на TS -диаграмме (рис. 5.1') подведенное к рабочему телу тепло определяется площадью под кривой ABC , а отданное холодильнику — площадью под кривой CDA . Радиус r окружности $ABCD$ равен расстоянию от точки D до оси абсцисс. Из геометрических соображений получаем $Q_1 \propto 4r^2 + \pi r^2/2$ и $|Q_2| \propto 4r^2 - \pi r^2/2$. Используя выражение для КПД цикла в форме $\eta = (Q_1 - |Q_2|)/Q_1$, получаем, что $\eta = 2\pi/(8 + \pi) \approx 0,564$ (56,4%).

$$5.88. \eta = 1 - \ln 2.$$

$$5.89. \frac{Q_{II}}{Q_I} = 181.$$

$$5.90. \frac{Q_I}{A} = 2570.$$

5.91. *Решение.* Теплоемкость $C_V = (\delta Q/dT)_V$. Учитывая, что $\delta Q = T dS$, получаем $C_V = T(\partial S/\partial T)_V$, и $(\partial C_V/\partial V)_T = T[\partial(\partial S/\partial T)_V/\partial V]_T$. Переставляя порядок дифференцирования по V и по T , а также учитывая соотношение $(\partial S/\partial V)_T = (\partial P/\partial T)_V$, получаем $(\partial C_V/\partial V)_T = 6AT^2$. С учетом того, что по условию $P = AT^3$, имеем: $(\partial C_V/\partial V)_T = 6P/T = 2 \cdot 10^3 \text{ Па/К}$.

$$5.92. C_P = \frac{5}{2} R \text{ (идеальный газ).}$$

$$5.93. C_V = \frac{3}{2} R \text{ (идеальный газ).}$$

$$5.94. \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T = 3P = 3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$5.95. P = A(V) \cdot T + B(V).$$

$$5.96. Q = \frac{\alpha}{T} B_0^2.$$

$$5.97. T_x = T[a/(a+B)]^{2/3} \approx 10^{-2} \text{ К.}$$

Указание. В данном случае $S = -(\partial F/\partial T)_B$.

5.98. *Решение.* При распаде моля H_2 образуется два моля атомарного водорода. Если исходное количество H_2 принять за единицу, то в результате диссоциации получится 2α молей атомарного водорода H и останется $1 - \alpha$ молей H_2 . Запишем уравнение реакции $H_2 = 2H$ в стандартном виде: $H_2 - 2H = 0$. Тогда $n_1 = 1$, $n_2 = -2$ и константа реакции выглядит так:

$$K_P(T) = P_H^2/P_{H_2} = K \exp(-Q_P/RT),$$

где $Q_P = -\sum n_i H_i = 2H(H) - H(H_2)$ — разность энтальпий продуктов реакции и исходных веществ, т.е. теплота реакции (при постоянном давлении).

Учитывая, что давления газов пропорциональны числу молей, т.е. $P_i = n_i P$, получаем $K_C(T) = (2\alpha)^2/(1 - \alpha) = (K'/P) \exp(-Q_P/RT)$.

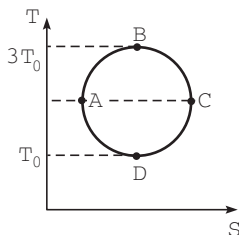


Рис. 5.1'

Принимая во внимание равенство давлений в двух рассматриваемых случаях, приходим к соотношению

$$Q_P = [RT_1 T_2 / (T_2 - T_1)] \ln[K_C(T_2) / K_C(T_1)] = 4,6 \cdot 10^5 \text{ Дж/моль.}$$

5.99. $\alpha_x = 0,6$.

5.100. $\alpha_x = 0,94$.

5.101. $W = [kT_1 T_2 / (T_2 - T_1)] \cdot [2 \ln(T_1 / T_2) - \ln(I_1 / I_2)] = 4,54 \text{ эВ.}$

3. Приложения законов термодинамики

5.102. $P \approx 98 \text{ атм; } P_{\text{пл}} \approx 198 \text{ атм.}$

5.103. $x = V_{\text{ж}} / V_{\text{к}} \approx 0,25$.

5.104. $T = 0,8 T_K = 373 \text{ К.}$

5.105. $\Delta T = \frac{a}{C_V} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \approx 0,25 \text{ К.}$

5.106. $\Delta S \approx -R \ln 2 - \frac{a}{2V_0 T_0} - \frac{Rb}{V_0}.$

5.107. $C_P - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$

5.108. *Решение.* Так как температура постоянна, из выражения для энтропии газа Ван-дер-Ваальса имеем: $\Delta S = R \ln[(V_2 - b)/(V_1 - b)]$. По условию $V_1 = V_{\text{к}} = 3b$, откуда $\Delta S = R \ln 13$. Вновь используя условие постоянства температуры, получаем $Q = T \Delta S = RT_{\text{к}} \ln 13$. Из формулы для внутренней энергии $\Delta U = (a/V_1) - (a/V_2) = 8a/27b$, или, если использовать выражение для критической температуры: $\Delta U = RT_{\text{к}}$. Тогда из первого начала термодинамики получаем: $A = Q - \Delta U = RT_{\text{к}}(\ln 13 - 1)$.

5.109. $\Delta S = C_V \ln[(5n + 3)/8n] + R \ln[(3n - 1)/2] = 1,9R.$

5.110. $T(V - b)^{n-1} = \text{const}$, где $n = 1 + \frac{R}{C_V - C}.$

5.111. $A = R(T_2 - T_1) \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \approx 21 \text{ Дж.}$

5.112. $\eta = 1 - \frac{RT_1}{C_V(T_2 - T_1)} \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$

5.113. $T < T_{\text{нпв}} = 35,1 \text{ К.}$

5.114. $V_{\text{к}} = 113 \text{ см}^3/\text{моль; } P_{\text{к}} = 34,4 \text{ атм.}$

5.115. $m = 4,8 \text{ г; } P = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па.}$

5.116. $\Delta T = (T/q) \Delta v \Delta P \approx 0,056 \text{ К.}$

5.117. $q \approx T(\Delta P / \Delta T) \Delta V \approx 184 \text{ Дж/г} \approx 44 \text{ кал/г}$ (опыт дает 46,4 кал/г).

5.118. $P \approx \left(1 + \frac{\lambda \Delta T}{\nu R T^2} \right) P_0 = 1,035 \text{ атм}$, где λ — удельная теплота парообразования, $\nu = 1/18$ — число молей в 1 г воды, P_0 — атмосферное давление.

5.119. $\Delta T / \Delta P = T(v_{\text{ж}} - v_{\text{п}}) / q = -0,0075 \text{ К/атм.}$ Дьюар опытным путем нашел $\Delta T / \Delta P = -0,0072 \text{ К/атм.}$

5.120. $\Delta m / m \approx C(T_{10} - T_1) / \lambda \approx 14\%$, где c — удельная теплоемкость воды, T_1 и T_{10} — температуры кипения при 1 и 10 атм, соответственно.

5.121. *Решение.* Подсчитаем изменение внутренней энергии вещества при переходе из состояния «вода при температуре T_1 » в состояние «газ при температуре T_2 » двумя способами.

1. Сначала вода испаряется, получая тепло λ_1 и совершая работу $P_1 V_1 = RT_1/\mu$. Изменение ее внутренней энергии равно $\lambda_1 - RT_1/\mu$. Затем водяной пар нагревается до температуры T_2 , и приращение внутренней энергии равно $C_V(T_2 - T_1)/\mu$. Всего $\Delta U_1 = \lambda_1 - RT_1/\mu + C_V(T_2 - T_1)/\mu$.

2. Вода нагревается до температуры T_2 , при этом можно считать, что все тепло $c(T_2 - T_1)$ идет на увеличение ее внутренней энергии. Затем вода испаряется, и прирост внутренней энергии: $\lambda_2 - RT_2/\mu$. Всего $\Delta U_2 = \lambda_2 - RT_2/\mu + c(T_2 - T_1)$.

Внутренняя энергия является функцией состояния, следовательно, $\Delta U_1 = \Delta U_2$. Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 + [c - (C_V + R)/\mu](T_2 - T_1) \approx 2,38 \cdot 10^3$ Дж/г.

$$5.122. A_{\max} = cm_1(T_1 - T) - qm_2 = 61,8 \text{ кДж};$$

$$T = T_1 \exp\left(-\frac{m_2 q}{cm_1 T_2}\right) = 279 \text{ К, где } c \text{ — удельная теплоемкость воды.}$$

$$5.123. F = 2\sigma\rho\pi^2 r^4/m = 780 \text{ Н, где } \rho = 13,6 \text{ г/см}^3 \text{ — плотность ртути.}$$

$$5.124. F = 2\sigma m/\rho d^2 = 1,46 \cdot 10^3 \text{ Н, где } \rho = 1 \text{ г/см}^3 \text{ — плотность воды.}$$

5.125. *Решение.* Легко видеть, что давление внутри столба масла, втянутого силами поверхностного натяжения в трубку, будет отрицательным (т.е. столб растянут, а не сжат). Действительно, в условиях данной задачи внешнее давление на поверхность масла равно нулю. Поэтому давление внутри столба на уровне масла в чашке тоже равно нулю, так как давление в жидкости в точках, расположенных на одном уровне, всегда одинаково. Во всех точках внутри столба давление будет меньше нуля на значение гидростатического давления. В частности, для точки, находящейся на уровне $h/3$ будем иметь $P = -\rho gh/3$. Высоту h можно определить, записав условие равновесия столба под действием силы тяжести и силы поверхностного натяжения: $h = 2\sigma/\rho g r$. Подставляя это выражение в формулу для P , найдем $P = -2\sigma/3r$.

$$5.126. C - C_P = \frac{4\sigma R}{3P_0 r} = \frac{2}{3}R \cdot 10^{-4} \approx 5,56 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \approx 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ кал/(моль} \cdot \text{К)}.$$

$$5.127. 1) P - P_0 \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{v_{\text{ж}}}{v_{\text{н}}} \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{\mu v_{\text{ж}} P_0}{RT} = 25,2 \text{ Н/м}^2 = 0,19 \text{ мм рт.ст.}$$

2) $P/P_0 = 2,9$. При столь малых размерах формула $\frac{P}{P_0} = \exp\left(\frac{\mu v_{\text{ж}}}{RT} \frac{2\sigma}{r}\right)$, по которой и был получен этот результат, может рассматриваться как оценочная.

$$5.128. r = \frac{2\sigma T}{\rho_{\text{ж}} \lambda \Delta T} \approx 225 \text{ \AA} = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

4. Элементы статистической физики

$$5.129. \langle a \rangle = 0,5; \sigma = 0,5; \varepsilon = 1.$$

$$5.130. \text{Соответственно } 1; 0,707; 0,707. \text{ Ответ не изменится.}$$

5.131. $\langle A \rangle = 6\langle a \rangle = 3; \sigma_A = \sigma_a \sqrt{6} \approx 1,22; \varepsilon_A = \varepsilon_a / \sqrt{6} \approx 0,289$ во всех трех вариантах ($\langle a \rangle$ — из зад. 5.129).

$$5.132. \text{Соответственно } 3,5; 1,71; 0,488.$$

$$5.133. 7; 2,415; 0,345.$$

$$5.134. 35; 5,4; 0,154.$$

$$5.135. 0,8; 0,4; 0,5.$$

$$5.136. 9,7; 0,458; 0,047.$$

$$5.137. 97; 1,45; 0,015.$$

$$5.138. c = 1; \langle x \rangle = 1/2; \sigma = 1/(2\sqrt{3}) \approx 0,289; \varepsilon = 1/\sqrt{3} \approx 0,577.$$

$$5.139. c = 2; \langle x \rangle = 2/3; \sigma = 1/(3\sqrt{2}) \approx 0,236; \varepsilon = 1/(2\sqrt{2}) \approx 0,354.$$

$$5.140. f(\varphi) = \pi^{-1}(\varphi_0^2 - \varphi^2)^{-1/2}.$$

$$5.141. \frac{N_0}{N_1} \approx 9,5 \text{ (у поверхности Земли больше).}$$

$$5.142. h = \frac{(T_c - T_0)\langle T \rangle \Lambda}{T_c T_0 \mu g} \approx 6 \text{ км.}$$

Указание. На уровне моря при давлении P_0 температура кипения воды $T_0 = 373$ К. Подставляя вместо T в уравнение Клапейрона–Клаузиуса T_c , а в барометрическую формулу — $\langle T \rangle$, и приравнявая получившиеся выражения, находим высоту, на которой температура кипения воды равна 80°C .

5.143. Решение. Линейность означает, что на высоте $H_1 + x$ температура равна $T_1 + x \frac{T_2 - T_1}{H_2 - H_1}$. Плотность газа $\rho = \frac{\mu P}{RT}$. Тогда для скорости изменения давления имеем $\frac{dP}{dx} = -\rho g = -\frac{\mu P g}{RT}$. Окончательно получаем

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g dx}{R \left[T_1 + x \frac{T_2 - T_1}{H_2 - H_1} \right]}.$$

После интегрирования от $x = 0$ до $x = H_2 - H_1$ получаем

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{\mu g (H_2 - H_1)}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1} = -1,967.$$

Отсюда $P_2 = P_1 e^{-1,967} = 0,14 P_1 = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Па.

5.144. Решение. Учтем, что во-первых, давление и концентрация n для идеального газа пропорциональны друг другу и, во-вторых, один идеальный газ не влияет на поведение другого. Концентрации газов с разными молярными массами по-разному убывают с высотой. Концентрация аргона весьма мала, поэтому можно считать, что до высоты, на которой давление падает в 10 раз, молярная масса воздуха не меняется (измерения подтверждают это). Поэтому мы можем записать изменение концентрации для воздуха в целом ($\mu_1 = 29$ г/моль) и отдельно для аргона ($\mu_2 = 40$ г/моль):

$$\begin{aligned} n_1(h) &= n_1(0) e^{-\mu_1 g h / RT}, \\ n_2(h) &= n_1(0) e^{-\mu_2 g h / RT}. \end{aligned}$$

Поделив второе равенство на первое и учитывая, что отношение концентраций аргона и воздуха есть относительная концентрация c , получим

$$c(h) = c(0) e^{(\mu - \mu_2) g h / RT}.$$

Прологарифмируем второе и третье равенство и поделим одно на другое:

$$\frac{\ln[n(h)/n(0)]}{\ln[c(h)/c(0)]} = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Учитывая, что по условию задачи $n(h)/n(0) = 0,1$, а $c(0) = 0,009$, окончательно получаем

$$c(h) = c(0) \cdot 10^{(\mu_1 - \mu_2)/\mu_1} \approx 0,0038 \text{ (0,38\%)}. \quad \square$$

5.145. Решение. Распределение концентрации частиц можно записать в виде $n(h) = n_1 \exp(-\alpha h)$, где h — расстояние от дна кюветы, n_1 — концентрация у дна, и (с учетом силы Архимеда) $\alpha = \frac{mg(\rho - \rho_0)}{\rho k T}$.

Запишем условие неизменности полного числа частиц:

$$\int_0^H n(h) dh = n_0 H.$$

В результате получаем $n_1 = n_0 H \alpha [1 - \exp(-\alpha H)] = 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-3}$, а для концентрации у верха кюветы $n_2 = n_1 \exp(-\alpha H) = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-3}$.

5.146. $h = 0,03 \text{ мм}$.

5.147. $r_x = 8,1 \text{ см}$.

5.148. $T = \frac{\mu g H}{4R}$.

Указание. Число молекул в слое толщины dz равно произведению концентрации $n(z) = n(0) \exp(-\mu g z / RT)$ на объем слоя, который пропорционален z^2 .

5.149. $T = \frac{3 \mu g R}{4 k_B}$.

5.150. $\bar{\varepsilon}_n = k_B T$; $C = C_P$.

5.151. $\bar{\varepsilon}_n = \frac{1 - \left(1 + \frac{mgH}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{mgH}{k_B T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{mgH}{k_B T}\right)} k_B T$.

5.152. $\bar{U} = \frac{k_B T}{2}$.

5.153. $T = \frac{\varepsilon}{k_B \ln 3}$.

5.154. $E = -\varepsilon N_A \frac{e^2 - 1}{e^2 + e + 1} = -0,575 \varepsilon N_A$.

5.155. $t = 153^\circ \text{C}$.

5.156. $\bar{v} \propto P^{1/5}$.

5.157. $\frac{v_1}{v_b} = \left[\frac{2 \ln n}{n^2 - 1} \right]^{1/2} = 0,366$, $\frac{v_2}{v_b} = 1,83$.

Указание. Удобно, полагая $v_1/v_b = \xi$ и $v_2/v_b = n\xi$, воспользоваться нормированным распределением Максвелла.

5.158. $dN = 2\pi N (\pi k_B T)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp[-\varepsilon/(k_B T)] d\varepsilon$.

5.159. $T = mv^2/(3k_B)$.

5.160. $\alpha = \exp[-eV/(k_B T)]$, где e — заряд электрона (по абсолютной величине); 1) $\alpha = 13,5\%$; 2) $\alpha = 1,8\%$.

5.161. Решение. Рассмотрим сначала частный случай, когда абсолютные значения скоростей всех молекул одинаковы, но их распределение по скоростям изотропно. В этом случае число молекул в 1 см^3 , направления скоростей которых лежат внутри телесного угла $d\Omega$, будет $dn = n d\Omega/(4\pi)$, где n — число молекул в 1 см^3 . Рассмотрим молекулы, ударяющиеся об 1 см стенки и подлетающие к ней с углами падения между θ и $\theta + d\theta$. Для них

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad dn = n \sin \theta d\theta/2.$$

Число ударов молекул рассматриваемого типа об 1 см^2 стенки в 1 с будет

$$dz = nv \sin \theta \cos \theta d\theta/2.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до $\pi/2$, найдем $z = nv/4$.

Если абсолютные скорости молекул различны, то молекулы следует разбить на группы с практически одинаковыми значениями скоростей. Таким путем легко

получить

$$z = \frac{1}{4} n \bar{v},$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость молекул. Для максвелловского распределения

$$z = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = n \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}.$$

$$\mathbf{5.162.} \quad \bar{\varepsilon} = 2k_B T.$$

$$\mathbf{5.163.} \quad T_0 = \sqrt{T_1 T_2} = 400 \text{ К}; P = \frac{P}{2} \left[\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/4} + \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/4} \right] \approx 1,06 \text{ атм.}$$

5.164. Решение. Скорость испарения определяется выражением

$$q = \frac{1}{4} n m \bar{v},$$

где n — концентрация атомов насыщенного пара вольфрама. Его давление

$$P = \frac{1}{3} n m \bar{v}^2 = \frac{4}{3} q \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}}.$$

При максвелловском распределении

$$\frac{\bar{v}^2}{\bar{v}} = 3 \sqrt{\frac{\pi k_B T}{8m}} = 3 \sqrt{\frac{\pi R T}{8A}},$$

где A — относительная атомная масса, равная для вольфрама 184. Окончательно получаем

$$P = q \sqrt{\frac{2\pi R T}{A}}.$$

Подставив сюда численные значения, найдем для давления насыщенных паров вольфрама при $T = 2000 \text{ К}$: $P \approx 8,5 \cdot 10^{-10} \text{ Па} \approx 6,4 \cdot 10^{-12} \text{ мм рт. ст.}$

$$\mathbf{5.165.} \quad \frac{dM}{dt} = P \sqrt{\frac{\mu}{2\pi R T}} \approx 0,38 \text{ г/(с·см}^2\text{)}, \text{ где } \mu \text{ — молярная масса.}$$

5.166. Для двух значений температуры должны быть равными следующие выражения

$$\left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}.$$

В точке пересечения, очевидно, $v_1 = v_2$. Кроме того, $mv^2/2k_B T_1 = 1$. Поэтому, обозначив $T_2 = nT_1$, получаем $e^{-1} = n^{-3/2} e^{-1/n}$ или $n \ln n = 2(n-1)/2$. Отсюда $n \approx 0,5$ (0,4664).

$$\mathbf{5.167.} \quad \varepsilon_N \approx N^{-1/2} \approx 2 \cdot 10^{-4} \approx 0,02\%.$$

5.168. $V = 1/(N\alpha^2) = 3,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3$; $\bar{n} = 1/\alpha^2 = 10^{12}$, где N — число молекул в единице объема ($N = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$).

$$\mathbf{5.169.} \quad \frac{w_1}{w_0} = e^{\Delta S/k_B} \approx 10^{-162}, \text{ где } \frac{\Delta S}{k_B} = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{V} \frac{C_V}{k} \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2, V \text{ — объем сосуда,}$$

$$v_0 = 10^{-6} \text{ см}^3.$$

$$\mathbf{5.170.} \quad \frac{\langle (\Delta T)_2^2 \rangle}{\langle (\Delta T)_1^2 \rangle} = 1/2.$$

5.171. $w = (1/2)^N$; $N = \log_2(T/\tau) \sim 70$, где $\tau \sim 10^{-4} \text{ с}$ — время разлета, т.е. время, которое требуется молекуле газа, чтобы пролететь расстояние порядка размеров сосуда.

$$5.172. n = 7,8 \cdot 10^{11}.$$

$$5.173. \varepsilon \approx 0,01.$$

$$5.174. \frac{\sqrt{\langle \Delta u^2 \rangle}}{\langle u \rangle} = \sqrt{2} \text{ для одной молекулы; } \frac{\sqrt{\langle \Delta U^2 \rangle}}{\langle U \rangle} = \sqrt{\frac{2}{N_A}} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ для}$$

одного моля.

5.175. *Решение.* Согласно выражению для среднего числа dN молекул газа, кинетические энергии которых заключены между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ (см. ответ зад. 5.158):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \varepsilon T^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha \varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty T^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha \varepsilon} d\varepsilon},$$

где введено обозначение $\alpha = 1/(k_B T)$. Обозначая знаменатель через Z и дифференцируя его по параметру α , получим

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\alpha}, \quad \langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\alpha^2}.$$

Вычислив интеграл Z , по этим формулам найдем $\langle \varepsilon \rangle = 3k_B T/2$, $\langle \varepsilon^2 \rangle = 15k_B^2 T^2/4$ и далее

$$\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2 = 3k_B^2 T^2/2.$$

$$5.176. \frac{\langle (\delta h)^2 \rangle^{1/2}}{h} = \frac{(\rho g k_B T / \pi)^{1/2}}{2\sigma}.$$

Указание. При изменении высоты столбика жидкости на некоторую величину δh возникает возвращающая сила $f = \rho g \delta h \pi r^2$, где r — радиус капилляра. Тогда избыточная потенциальная энергия равна $\pi r^2 \rho g (\delta h)^2/2$. Ее среднее значение должно быть равно $kT/2$.

$$5.177. \frac{\Delta T}{T} \approx 4 \cdot 10^{-11}.$$

$$5.178. m \approx \frac{\sqrt{\alpha k_B T}}{g}.$$

$$5.179. l = l_0 (T_0/T)^{1/2} \approx 8,5 \text{ км.}$$

$$5.180. \text{Примерно в 72 раза.}$$

$$5.181. \Delta I_{\min} \approx (2eI/\tau)^{1/2} \approx 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ А.}$$

$$5.182. E = 1,5 \text{ PV} = 150 \text{ Дж.}$$

$$5.183. \bar{\varepsilon} = k_B T (V_1/V_2)^{\gamma-1} = 1,65 \cdot 10^{-13} \text{ эрг.}$$

$$5.184. \bar{\varepsilon} = k_B T/2 = 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ эрг; } \sqrt{\langle \nu^2 \rangle} = 7,2 \cdot 10^{11} \text{ Гц.}$$

$$5.185. \sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \frac{4k_B T}{Mr^2} = 7,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

$$5.186. \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 3,3 \text{ см; 1) результат уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в } \sqrt{8} \text{ раз; 3) увеличится в } \sqrt{2} \text{ раз.}$$

$$5.187. v = \sqrt{\frac{\lambda e E}{2m}} \approx 15 \text{ м/с, где } m \text{ — масса иона Ag, } e \text{ — заряд электрона.}$$

$$5.188. \tau \approx \frac{R^2}{6D} \approx \frac{R^2}{2\lambda v} \approx \frac{R^2}{2\lambda c} \approx 1,4 \cdot 10^{14} \text{ с} \approx 4,4 \cdot 10^6 \text{ лет, где } v \text{ — скорость космической частицы, близкая к скорости света } c \text{ в вакууме.}$$

$$5.189. \tau_{\min} = \frac{3l^2 \pi \eta r}{2k_B T} \approx 15 \text{ с.}$$

$$5.190. \langle r^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{k_B T \tau}{R \sigma} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2; \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2 \text{ мм, где } \mu = 12,4 \text{ г/моль —}$$

приведенная молярная масса Ar и H₂O.

5.191. Время образования жирового слоя $\tau_{06} \approx \frac{l}{\frac{FB}{l^2}} \approx 1 \text{ сут (по условию)}$. Время восстановления однородного распределения $\tau_b \approx \frac{FB}{2k_B T B}$. Подсчет показывает, что $\tau_b \approx 10^{11} - 10^{12} \text{ с} \sim 1000 \text{ лет}$.

5.192. *Решение.* Вначале газ должен продиффундировать от центра сосуда до входа в трубку. В соответствии с общим соотношением $(\delta l)^2 \approx 2D\tau$ время, через которое газ достигнет входа в трубку, можно оценить как $\tau_1 = r_1^2/2D_1 = = 3r_1^2 n \sigma / 2 \langle v \rangle \approx r_1^2 n \sigma (\mu/RT)^{1/2}$. Затем газ диффундирует по трубке. При оценке времени распространения по трубке вместо длины пробега $1/n\sigma$ мы должны подставлять величину r_2 , и значит, $\tau_2 = l^2/2D_2 = 3l^2/2r_2 \langle v \rangle \approx l^2 (\mu/RT)^{1/2}/r_2$. Для полного времени распространения газа от центра сосуда до конца трубки получаем оценку $\tau \approx (r_1^2 n \sigma + l^2/r_2) (\mu/3RT)^{1/2}$.

$$5.193. \Delta C = N_A \varepsilon^2 / 2k_B T^2.$$

$$5.194. \Delta C = (N_A \varepsilon^2 / k_B T^2) \exp(-\varepsilon/kT).$$

$$5.195. \Delta C = 2N_A \varepsilon^2 / 3k_B T^2.$$

5. Неравновесные процессы

$$5.196. \Delta S = A/T = 0,08 \text{ Дж/К}.$$

5.197. *Решение.* Как следует из задачи 5.38 в сосуде устанавливается профиль температуры $T = T_0 + 3T_0 x/L$. Пусть площадь сечения сосуда σ . Выделим на высоте x бесконечно малый слой высотой dx . Число молей в этом объеме

$$d\nu = \frac{P}{RT} dV = \frac{P\sigma}{RT} dx = \frac{P\sigma}{RT_0} \frac{dx}{1 + 3x/L}.$$

Так как во всем объеме находится один моль газа, то в начальном состоянии $1 = = \nu = P_0 L \sigma / RT_0$, а в конечном

$$1 = \int d\nu = \frac{PL\sigma}{3RT_0} \ln 4,$$

т.е. $P = 3P_0 / \ln 4$. Общее выражение для изменения энтропии

$$dS = C_P \ln(T/T_0) d\nu - R \ln(P/P_0) d\nu,$$

поэтому в данном случае мы имеем:

$$\Delta S = \int C_P \ln(T/T_0) d\nu - R \ln(3/\ln 4).$$

Выполним интегрирование в первом члене, учитывая, что $P = 3P_0 / \ln 4$, $P_0 L \sigma / RT_0 = = 1$ и $dx/(1 + 3x/L) = (L/3)d[\ln(1 + 3x/L)]$:

$$C_P \int_0^L \left(\ln \frac{1}{1 + 3x/L} \right) \frac{P\sigma}{RT_0} \frac{dx}{1 + 3x/L} = \frac{C_P}{\ln 4} \left(\ln \frac{1}{1 + 3x/L} \right)^2 \bigg|_0^L = \frac{5}{4} R \ln 4.$$

Окончательно

$$\Delta S = \frac{5}{4} R \ln 4 - R \ln \frac{3}{\ln 4} = 0,96R = 7,97 \text{ Дж/К}.$$

5.198. Аналогично приведенному в предыдущей задаче решению с учетом результата задачи 5.39 и, принимая во внимание, что давление в цилиндре все время постоянно, имеем

$$\Delta S = \int C_P \ln(T/T_0) d\nu = \frac{C_P}{\ln 9} \frac{(\ln 9)^2}{2} = \frac{7R}{4} \ln 9 = 3,85R = 31,9 \text{ Дж/К}.$$

5.199. Так как по условию $d_e S = 0$, то это значит, что $d_i S \geq 0$. Для обратимых и равновесных процессов $d_i S = 0$.

5.200. По определению $\Phi = U + PV - TS$, поэтому $-T \frac{dS}{dt} = \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_{T,P}$, т.е. внутренние процессы ведут к уменьшению ее термодинамического потенциала.

5.201. Решение. В силу теплового баланса Земли такое же количество тепла, которое получает Земля от Солнца ($T_C = 6000 \text{ К}$), Земля излучает обратно в космическое пространство, однако при другой температуре — $T_3 = 260 \text{ К}$. В силу термодинамического соотношения $\delta Q = T dS$ общий экспорт энтропии равен

$$\frac{d_e S}{dt} \simeq \left(\frac{dE}{dT} \right) \left[\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_3} \right] = -6 \cdot 10^{14} \text{ Вт/К}.$$

Плотность оттока энтропии в среднем

$$J_s = \frac{d_e S/dt}{4\pi R_3^2} = -1 \text{ Вт/(К} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Это верхний предел экспорта энтропии Землей, ответственный за биологическое развитие и эволюцию.

5.202. Решение. Общее изменение энтропии всей системы по второму началу термодинамики положительно, т.е.

$$dS = dS_1 + dS_2 > 0,$$

где dS_1 и dS_2 — изменение энтропии космонавта и окружающей среды, причем

$$dS_1 = d_i S_1 + d_e S_1.$$

Здесь $d_i S$ — энтропия, производимая внутри системы, а $d_e S$ — энтропия, поступающая извне или уходящая во внешнюю среду.

Изменение dS_2 происходит в результате обмена среды веществом и энергией с космонавтом — продукции энтропии в среде, окружающей космонавта, практически нет. Поэтому

$$dS_2 = -d_e S_1 \quad \text{и} \quad dS = d_i S_1 > 0.$$

Если состояние космонавта стационарно, то

$$dS_1 = 0, \quad d_e S_1 = -d_i S_1 < 0, \\ dS_2 \equiv dS = d_i S_1 > 0.$$

Стационарное состояние космонавта поддерживается возрастанием энтропии в окружающей среде, определяемым оттоком в нее энтропии из организма космонавта, компенсирующим продукцию энтропии в организме. Энтропия среды возрастает ($dS_2 > 0$) вследствие выделения теплоты космонавтом и вследствие того, что энтропия веществ, выделяемых космонавтом, выше энтропии потребляемых им веществ.

5.203. Решение. Дифференциальное уравнение для числа клеток со временем имеет вид

$$dN/dt = V_{\text{раз}} - V_{\text{гиб}}, \quad V_{\text{раз}} = k_1 N, \quad V_{\text{гиб}} = k_2 N.$$

Мы записали, что скорость размножения и гибели клеток пропорциональны их полному числу N . Итак

$$dN/dt = k_1 N - k_2 N = k N.$$

Решение этого уравнения

$$N = N_0 e^{-kt}.$$

Если $k_1 > k_2$ ($k > 0$), то $N(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Если же $k_1 < k_2$ ($k < 0$), то $N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Условие равновесия $k_1 = k_2$, что приводит к стационарному состоянию $N = N_0$.

5.204. Решение. На основе баланса энтропии в клетке получаем:

$$\Delta S = S_1 - S_2 = \alpha(4\pi r^3/3) - \beta(4\pi r^2).$$

Клетка растет до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное состояние, при котором $\Delta S = 0$, что соответствует радиусу клетки $r_0 = 3\beta/\alpha$.

При $r > 3\beta/\alpha$ производство энтропии внутри клетки уже не компенсируется оттоком и клетка гибнет. Но если она при этом делится, то ΔS вновь становится отрицательной величиной. Объем при делении сохраняется, но поверхность возрастает, поэтому радиус r_1 двух новых клеток находится из соотношения $2(4\pi r_1^3/3) = 4\pi r_0^3/3 \rightarrow r_1 = r_0/2^{1/3}$. Суммарная поверхность двух новых клеток равна $8\pi r_0^2/4^{1/3}$, а разница энтропии

$$\Delta S = 36\pi \frac{\beta^3}{\alpha^2} (1 - 2^{1/3}) \simeq -29,4 \frac{\beta^3}{\alpha^2}.$$

5.205. Решение. Во-первых следует иметь в виду, что получение информации о физической системе требует реальных физических воздействий на нее, т.е. получить информацию о событиях в адиабатически изолированной системе нельзя. Любой опыт, дающий информацию о некоторой системе, приводит к увеличению энтропии системы или ее окружения. Подобно количеству информации, энтропия выражается как логарифм термодинамической вероятности — числа микросостояний, реализующих данное макросостояние, т.е. $S = k_B \ln W$. Как видно, выражения энтропии и информации аналогичны, что позволяет выражать количество информации и в энтропийных единицах. По определению одна энтропийная единица (1 э.е.) равна 1 Дж/К.

Пусть число микросостояний убывает от P_0 до P_1 . Количество получаемой при этом информации составляет

$$I = k_B \log_2(P_0/P_1) = S_0 - S_1,$$

т.е. действительно I равно уменьшению энтропии или увеличению негэнтропии. Информация оплачивается энтропией, так как наблюдение связано с увеличением энтропии, с необратимым процессом.

При смешении N_1 молекул первого газа и N_2 молекул второго газа энтропия образовавшейся смеси S больше энтропии разделенных газов S_0 на величину смешения

$$\Delta S = S - S_0 = -k_B N (P_1 \log_2 P_1 + P_2 \log_2 P_2) > 0,$$

где $N = N_1 + N_2$, $P_1 = N_1/(N_1 + N_2)$, $P_2 = N_2/(N_1 + N_2)$. Это равносильно уменьшению количества информации на ту же величину. Значит исходная информация составляла

$$I_0 = -k_B N (P_1 \log_2 P_1 + P_2 \log_2 P_2).$$

5.206. Строго периодическое решение означает, что $u_1(t + T) = u_1(T)$. Подставляя это решение в исходное уравнение, получаем

$$u_1 = u_0 - \operatorname{Re} \frac{u_1^2}{u_0}, \quad \text{откуда} \quad u_1 = \frac{\sqrt{1 + 4\operatorname{Re}} - 1}{2\operatorname{Re}} u_0.$$

Пусть периодическое решение испытывает некоторое возмущение Δu . Подставляя в исходное уравнение решение в виде $u = u_1 + \Delta u$ и ограничиваясь членами первого порядка по Δu , получаем

$$u_1(t + T) + \Delta u(t + T) = u_0 - \operatorname{Re} \frac{u_1^2(t) + 2u_1 \Delta u}{u_0}.$$

Учитывая, что $u_1(t + T)$ также удовлетворяет исходному уравнению, получаем соотношение

$$\Delta u(t + T) = -2\text{Re} \frac{u_1 \Delta u(t)}{u_0}.$$

Если $2\text{Re} u_1 < u_0$, то течение устойчиво, так как $|\Delta(t + T)| < |\Delta u(t)|$. Потеря устойчивости происходит при условии $2\text{Re} u_1 = u_0$. Найдём величину $\text{Re} u_1$, подставляя это условие в соотношение для u_1 :

$$2\text{Re} u_1 = (\sqrt{1 + 4\text{Re}} - 1)u_0 \text{ откуда } \sqrt{1 + 4\text{Re}} = (2\text{Re} u_1 + u_0)/u_0 = 2,$$

т.е. $\text{Re} u_1 = 3/4$. Теперь из условия для Δu следует требуемое утверждение:

$$\Delta u(t + T) = -\Delta u(t) \text{ или } \Delta u(t + 2T) = -\Delta u(t + T) = \Delta u(t).$$

5.207. Неподвижные точки находятся из условия, что отображение переводит точку саму в себя:

$$x^* = f(x^*) = 4\lambda x^*(1 - x^*).$$

Из этого уравнения следует, что такими точками являются $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - 1/(4\lambda)$. Как видно, в заданном интервале значений переменной x две неподвижные точки получаются только при условии $1/4 \leq \lambda \leq 1$. Если параметр $\lambda < 1/4$, то пересечение функций происходит лишь в одной точке $x^* = 0$.

Графически неподвижные точки находятся следующим геометрическим построением. Построим графики функций $y = x$ и $y = f(x)$. В точках пересечения графиков имеем $x = y = f(x)$, и поэтому пересечения этих функций как раз являются неподвижными точками, как это показано на рисунке 5.2'. Если в точке $x = 0$ производная $f'(x) > 0$, то, как видно из рисунка, неподвижной точкой является только точка $x^* = 0$.

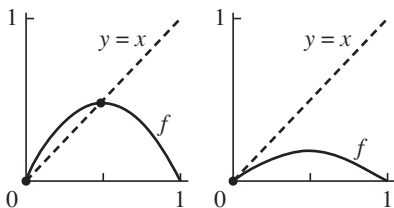


Рис. 5.2'

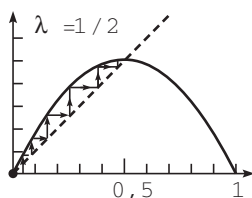


Рис. 5.3'

5.208. Производная от отображающей функции равна: $f'(x) = 4\lambda(1 - 2x)$. Для найденных в предыдущей задаче устойчивых точек эта производная $f'(x_1^*) = f'(0) = 4\lambda$, $f'(x_2^*) = f'(1 - 1/(4\lambda)) = 2 - 4\lambda$. Мы видим, что если $0 < \lambda < 1/4$, то устойчива только одна точка $x_1^* = 0$, а если $1/4 < \lambda < 3/4$, то x_1^* — неустойчива, а x_2^* — устойчива.

На приведенном графике (рис. 5.3') показано, как происходит эволюция системы, когда ее начальное состояние соответствует $x(0) = 0,15$. Чтобы графически найти поведение системы в результате последовательных итераций, надо выполнять следующие действия: отложим на оси абсцисс значение x_0 . Значение x_1 равно ординате $f(x_0)$. Чтобы найти x_2 , надо перевести вначале значение x_1 на ось абсцисс, т.е. провести горизонтальную прямую до пересечения с графиком $y = x$, а затем уже найти $x_2 = f(x_1)$ и т.д.

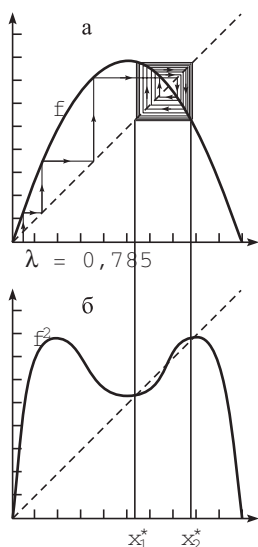


Рис. 5.4'

Как видно из построения, проведенного на рисунке, в нашем примере итерационная последовательность будет сходиться к устойчивой точке $x^* = 1/2$.

5.209. Решение. Выразим вначале производную от функции f^2 через производные от функции f . По определению $x_2 = f^2(x_0)$, где $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что $[f^2(x_0)]' = f'(x_0)f'(x_1)$. Для неподвижной точки $x^* = f(x^*)$ из приведенного выше соотношения следует $[f^2(x^*)]' = f'(x^*)f'(x^*) = [f'(x^*)]^2$. Таким образом, если неподвижные точки преобразования f неустойчивы, то они неустойчивы и для преобразования f^2 .

5.210. При $\lambda > 3/4$ в неподвижной точке x^* модули производных функций f и f^2 больше единицы, т.е. бывшая притягивающая точка x^* теряет устойчивость, но у функции f^2 появляются две новые неподвижные точки. Как видно из рис. 5.4'б, график f^2 пересекает прямую $y = x$ в двух дополнительных точках, причем наклон функции f^2 в двух новых неподвижных точках меньше 45° , т.е. они являются устойчивыми: каждая двойная итерация f будет притягиваться либо к x_1^* , если она достаточно близка к x_1^* , или к x_2^* , если она достаточно близка к x_2^* .

Как видно из рис. 5.4'а, итерации «наматываются» на устойчивый 2-цикл. Элементами 2-цикла являются неподвижные точки x_1^* и x_2^* преобразования f^2 .

6. Квантовая теория излучения

5.212. $C_P = \infty$, $VT^3 = \text{const.}$

5.213. Решение. $u = \alpha T^4$, внутренняя энергия $U = uV = \alpha VT^4$.

$$dS = \frac{dU + PdV}{T} = 3\alpha VT^2 dT + \alpha T^3 dV + \frac{\alpha T^3}{3} dV = d\left(\frac{4}{3}\alpha T^3 V\right).$$

5.215. $u_{\text{изл}} \propto T^4$.

5.216. Аналогично газокINETической формуле для молекулярного потока $I = cu_{\text{изл}}/4$.

5.217. $C_V \propto T^3$.

5.218. $dN(\nu) = (2l/s)d\nu$, где s — скорость распространения волн вдоль струны.

5.219. Решение. Возникающие стоячие волны (собственные колебания) можно рассматривать как суперпозицию стоячих волн, которые устанавливаются вдоль сторон параллелепипеда l_1, l_2, l_3 . Запишем условия для этих волн: $n_1 = l_1 k_1 / \pi$, $n_2 = l_2 k_2 / \pi$, $n_3 = l_3 k_3 / \pi$, где $k_i = 2\pi / \lambda_i$. В этих соотношениях n_1, n_2, n_3 — целые числа, характеризующие числа полуволн, укладывающихся в направлениях, параллельных сторонам l_1, l_2, l_3 .

Число различных колебаний, приходящихся на интервал $(n_1, n_1 + dn_1; n_2, n_2 + dn_2; n_3, n_3 + dn_3)$, равно

$$dZ = dn_1 dn_2 dn_3 = \frac{V}{\pi^3} dk_1 dk_2 dk_3,$$

где произведение $dk_1 dk_2 dk_3$ можно рассматривать как элемент объема в пространстве волновых чисел k_i . Построим в этом k -пространстве сферу радиуса k , уравнение которой $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2$. Все точки этой сферы соответствуют одной и той же длине волны λ , а, следовательно, одной и той же частоте ω . Поэтому число колебаний в интервале $(k, k + dk)$, или в интервале соответствующих частот $(\omega, \omega + d\omega)$, равно

$$dZ_\omega = \frac{V}{\pi^3} \int dk_1 dk_2 dk_3 = \frac{V}{\pi^3} \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega.$$

Коэффициент $1/8$ появился в этой формуле вследствие того, что интегрирование следует производить лишь в пределах одного октанта сферического слоя радиусами $(k, k + dk)$, так как нас интересуют только положительные значения чисел k_1, k_2, k_3 . Полученное выражение необходимо еще умножить на 2 в соответствие с тем, что каждой частоте отвечают два состояния поляризации (две волны со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации).

5.220. Решение. По определению среднее значение энергии осциллятора равно

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E N(E) dE}{\int_0^\infty N(E) dE} = k_B T.$$

Имея в виду, что $u_\omega d\omega = \langle E \rangle dZ_\omega$, и пользуясь результатом предыдущей задачи для числа колебаний в полости, получаем

$$u_\omega d\omega = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega.$$

Мы получили формулу Рэля–Джинса для плотности равновесного излучения, что вполне естественно, так как по условию задачи осциллятор является классическим (непрерывный энергетический спектр).

5.221. $n_\lambda d\lambda = 8\pi\lambda^{-4} [\exp(2\pi\hbar c/k_B T\lambda) - 1]^{-1} d\lambda$.

5.222. Решение. При $\hbar\omega/k_B T \ll 1$ экспоненту в формуле Планка можно разложить в ряд и, ограничиваясь первым членом разложения, получаем

$$\rho = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{k_B T}{\hbar\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T.$$

Эта формула может быть также получена на основе следующих рассуждений. Всего в единице объема имеется $\omega^2/(\pi^2 c^3)$ осцилляторов с частотой ω , а по теореме о равнораспределении энергии в равновесной системе на каждую степень свободы приходится энергия $k_B T/2$. У осциллятора $k_B T/2$ приходится в среднем на кинетическую энергию и $k_B T/2$ на потенциальную, т.е. средняя энергия осциллятора, находящегося при температуре T , равна $k_B T$. Перемножая среднюю энергию осцилляторы на их число, мы приходим к формуле Рэля–Джинса.

5.223. 7,76 мкм, 6780 Å, 2820 Å.

5.224. $1,6 \cdot 10^{-3}$.

5.225. $\alpha = (5/\pi^4)(E/k_B T)^3 \simeq 0,2\%$.

Указание. Все значения энергии фотонов $E = \hbar\omega \leq 0,2$ эВ удовлетворяют условию $\hbar\omega/k_B T \ll 1$ и поэтому можно считать, что $[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1} \simeq k_B T/\hbar\omega$.

5.226. $\alpha = (15/\pi^4)(E/k_B T)^3 \exp(-E/k_B T) \simeq 0,8 \cdot 10^{-6}$.

Указание. Для всех фотонов с энергией $E \geq 12$ эВ можно считать, что $[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1} \simeq \exp(-\hbar\omega/k_B T)$

5.227. Решение. Спектральная яркость серого тела с коэффициентом излучения $\varepsilon_{\lambda, T}$ вычисляется по формуле

$$B'_{\lambda, T} = \varepsilon_{\lambda, T} \frac{C_1}{\pi} e^{-C_2/\lambda T}.$$

По определению яркостной температуры $B_{\lambda, T_{\text{я}}} = B'_{\lambda, T}$. Следовательно,

$$\frac{C_1}{\pi} e^{-C_2/\lambda T_{\text{я}}} = \varepsilon_{\lambda, T} \frac{C_1}{\pi} e^{-C_2/\lambda T}.$$

После логарифмирования получаем

$$-\frac{C_2}{\lambda T_{\text{я}}} = -\frac{C_2}{\lambda T} + \ln \varepsilon_{\lambda, T},$$

откуда

$$T = \frac{C_2}{\lambda (\ln \varepsilon_{\lambda, T} + C_2/(\lambda T_{\text{я}}))},$$

где T — истинная температура тела.

5.228. 2350 К.

5.229. Решение. При тепловом равновесии мощность излучения, проникающего во вторую полость, равна мощности излучения, выходящего из этой полости:

$$J_1 \Delta \Omega = I_2, \quad \Delta \Omega = \frac{\pi d^2}{4R^2},$$

а значит $T_2 = T_1 \sqrt{d/2R} = 380$ К.

5.230. В 16 раз.

5.231. Давление теплового излучения $P = u/3$, u — плотность энергии излучения.

$$T = \left(\frac{3ck_B \rho}{2\sigma M} \right)^{-1/3} = 1,87 \cdot 10^7 \text{ К},$$

где M — масса атома водорода.

5.232. Решение. Оценим вначале величину $\hbar\omega/k_B T$:

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} \simeq \frac{10^{-34} \cdot 6,3 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{3} \frac{1}{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \simeq 0,0015 \ll 1.$$

Таким образом, измеряемая частота лежит в классической области спектра и согласно закону Рэлея-Джинса

$$u(\omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \propto T.$$

Если бы антенный тракт был абсолютно черным телом, то он бы поглощал все излучение, на самом деле он «серый» и коэффициент серости в области длин волн ~ 3 см равен 0,01. Это значит, что и излучать он будет 0,01 часть от интенсивности излучения абсолютно черного тела при температуре 300 К. Итак, так как мощность излучения пропорциональна T , то $AT_{\text{эф}} = \alpha AT$, где $\alpha = 0,01$, то есть $T_{\text{эф}} = 0,01 \cdot 300 = 3$ К. Это и есть шумовая температура антенного тракта.

5.233. В 28 раз.

5.234. $P = u/3 = (4\sigma/3c)T^4 = 4,6 \cdot 10^{11}$ атм.

5.235. 5960 К.

5.236. 44,3 Дж·см⁻²·мин⁻¹.

5.237. $T = (3cP/4\sigma)^{1/4} = 1,4 \cdot 10^5$ Дж.

5.238. Решение. Плотность теплового излучения можно представить в виде $u(\lambda, T) = (T/\lambda)^5 f(\lambda, T)$, где функция f зависит только от произведения λT . В

максимуме согласно закону смещения Вина $\lambda T = \text{const}$, а потому $u(\lambda, T) \propto T^5$. То же справедливо для излучательной способности, так как $E(\lambda, T) = (c/4)u(\lambda, T)$.

5.239. $5,8 \cdot 10^8$ Н.

5.240. $8,7 \cdot 10^{-6}$ см.

5.241. За 41 мин.

Указание. $-mCdT = \varepsilon \sigma S T^4 dt$, $-\frac{dT}{T^4} = \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} dt$, $\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} = 3\varepsilon \frac{\sigma S}{mC} \Delta t$.

5.242. В 1,3 раза.

5.243. $2,1 \cdot 10^{21}$ фотон/(см²·с).

5.244. 1600 К.

5.246. Решение. Среднее число фотонов, попадающее от звезды в зрачок глаза в одну секунду $\overline{N} = \frac{LAS}{hc/\lambda} \simeq 10^{34}$, где A — механический эквивалент света

(0,00160 Вт/лм), площадь зрачка глаза S принята равной 0,5 см², а длина волн $\lambda = 550$ нм. Статистические свойства фотонов описываются распределением

Пуассона, а потому $(\overline{\Delta N})^2 = \overline{N}$, $\frac{1}{\overline{N}} \sqrt{(\overline{\Delta N})^2} \sim 10^{-17}$. Отсюда видно, что квантовые флуктуации света к мерцанию звезд не имеют отношения.

5.247. 0,12.

5.248. Решение. Эквивалентная температура черного тела будет заведомо столь высокой, что для видимого света энергия фотонов $\hbar\omega \ll k_B T$, поэтому мы можем пользоваться для оценки температуры классической формулой Рэлея-Джинса. В таком приближении плотность излучения абсолютно черного тела равна

$$u = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{k_B T}{\hbar\omega} = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} = \frac{4k_B T}{c\lambda^2},$$

а поток

$$I_{\text{чт}} \frac{cu}{4} = \frac{k_B T}{\lambda^2}.$$

Спектральная яркость лазерного излучения, как и любого источника, по определению есть плотность потока излучения q_ν единицы поверхности в единичном интервале частот и в единицу телесного угла

$$I_\nu = \frac{q_\nu}{\Delta\nu \Delta\Omega},$$

и она связана с энергией излучения соотношением

$$E = q_\nu \frac{\pi D^2}{4},$$

где D — диаметр выходной апертуры. Согласно условию задача $\Delta\nu \sim 1/\tau$, $\Delta\Omega = \pi(\lambda/D)^2$. Таким образом, яркость лазерного излучения равна

$$I_\nu = \frac{q_\nu \tau}{\pi(\lambda/D)^2} = \frac{4E}{\pi^2 \lambda^2}.$$

Приравняв яркости лазерного излучения и излучения абсолютно черного тела, окончательно имеем

$$T = \frac{4E}{\pi^2 k_B} \simeq 4 \cdot 10^{22} \text{ К.}$$

5.249. $\Delta T = T_0(1 + P/P_0)^{1/4} \simeq (P/4P_0)T_0 = 0,006 \text{ К}$, где $T_0 = P_0/S\sigma = 240 \text{ К}$ — температура поверхности в отсутствие земных источников тепла.

5.250. Решение. Число ядер в урановом кусочке $N = mN_A/\mu = 10^{22}$. Число распадов в единицу времени $dN_i/dt = \lambda_i N = N \ln 2/T_{1/2}^i$. Хотя выделяемая

при делении энергия $E_{\text{спон}} \simeq 200$ МэВ, выделяемая за единицу времени энергия преимущественно определяется альфа-распадом, так как $E_{\alpha} \lambda_{\alpha} \gg E_{\text{спон}} \lambda_{\text{спон}}$. Из условия теплового баланса получаем, считая кусочек урана шариком: $E_{\alpha} \lambda_{\alpha} N = \sigma T^4 S = \sigma T^4 4\pi (3m/4\pi\rho)^{2/3}$. Температура урана равна

$$T = \left(\frac{E_{\alpha} \lambda_{\alpha} N}{\sigma S} \right)^{1/4} = 11 \text{ К.}$$

5.251. Если 1 и 2 — какие-либо два невырожденных уровня в стенках полости, в которых заключено равновесное излучение, то отношение интенсивности индуцированного к интенсивности спонтанного излучения равно

$$S = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Если $\exp(h\nu/k_B T) \leq 2$, т.е.

$$\lambda \leq \frac{hc}{k_B \lambda \ln 2},$$

то интенсивность индуцированного излучения становится больше или равна интенсивности спонтанного. При $T = 300$ К получаем $\lambda \geq 692$ мкм.

$$\mathbf{5.252.} \quad T > \frac{hc}{k_B \lambda \ln 2} \simeq 3,8 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

5.253. Решение. $P_{\text{ин}} = \bar{n} P_{\text{спон}} = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$ откуда следует, что $P_{\text{ин}} < 0,01 P_{\text{спон}}$ и $\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1 > 100$, а $\omega > (k_B T/\hbar) \ln 101$. таким образом

$$\lambda < \frac{hc}{k_B T \ln 101} \simeq 11 \text{ мкм.}$$

$$\mathbf{5.254.} \quad \tau = \frac{4\pi L}{c(1 - R_2)} \simeq 2 \cdot 10^{-7} \text{ с, } Q = \frac{c\tau}{\lambda} \simeq 10^8.$$

5.255. Генерация возникает, когда мощность света, излучаемая молекулами, превышает потери мощности при отражении на зеркалах. Когда световая волна проходит расстояние L , она один раз отражается от зеркала, теряя при этом часть

$1 - R$ своей энергии. За единицу времени теряется часть энергии, равная $\frac{1}{\tau_{\text{рез}}} = \frac{c(1 - R)}{L}$. Время $\tau_{\text{рез}}$ можно считать временем жизни фотона в резонаторе. Таким образом, потеря мощности излучения на зеркалах резонатора равна

$$P_{\text{рез}} = \frac{V \langle E^2 \rangle}{\tau_{\text{рез}} 4\pi} = \frac{\langle E^2 \rangle c(1 - R)V}{4\pi L},$$

где V — объем резонатора, а $\langle E^2 \rangle/4\pi$ — средняя плотность электрической энергии в световой волне.

Скорость убывания числа молекул на верхнем энергетическом уровне 2 определяется уравнением

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - B_{21}N_2 u_{\nu} + B_{12}N_1 u_{\nu},$$

где N_1 и N_2 — концентрации молекул на уровнях 1 и 2, u_{ν} — спектральная плотность энергии излучения на частоте перехода ν между этими уровнями, $B_{12} = B_{21}$ и $A_{21} = 1/\tau_{\text{спон}}$ — коэффициенты Эйнштейна, связанные между собой соотношениями

$$B_{21} = B_{12} = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3 \tau_{\text{спон}}}.$$

Спонтанным излучением, поскольку оно происходит по всем направлениям, можно пренебречь. В этом приближении для мощности индуцированного излучения в резонаторе находим

$$P_{\text{ин}} = -Vh\nu \frac{dN_2}{dt} = V(N_2 - N_1) \frac{c^3}{8\pi\nu^2 \tau_{\text{спон}}} u_\nu.$$

С учетом равенства $u_\nu \Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \langle E^2 \rangle$ условие генерации света $P_{\text{ин}} \geq P_{\text{рез}}$ принимает вид

$$N_2 - N_1 \geq \frac{8\pi\nu^2 u_\nu \Delta\nu}{c^2} \frac{1 - R}{L} \tau_{\text{сп}}.$$

5.256. $\Delta L/L = \Delta\omega/\omega = 10^{-15}$, а значит $\Delta L = \alpha \Delta T = 10^{-5}$ Å. Следовательно $\Delta T \simeq 10^{-8}$ К.

5.257. $w_{\text{ин}}/w_{\text{спон}} = \bar{n}(E) = [\exp(E/kT) - 1]^{-1}$, где $\bar{n}$ — средние планковские числа заполнения для осцилляторов. Так как энергия возбуждения атома $E \gg k_B T$, то

$$\frac{w_{\text{ин}}}{w_{\text{спон}}} \simeq \exp(-E/k_B T) \simeq 1,6 \cdot 10^{-17}.$$

5.258. Энергия электрона в заданном магнитном поле $\mu B \ll k_B T$, поэтому

$$\frac{w_{\text{ин}}}{w_{\text{спон}}} \simeq \frac{k_B T}{2\mu B} \simeq 2,2 \cdot 10^3.$$

7. Кристаллические структуры твердых тел

5.259. 1; 2; 4.

5.260. (010), (001), (100), (0, $\bar{1}$, 0), (0, 0, $\bar{1}$) и т.д. Кристаллографическая эквивалентность их проявляется в том, что эти плоскости совмещаются друг с другом при повороте вокруг одной из осей координат на угол, кратный 90° , физическая их эквивалентность в том, что все эти плоскости обладают одинаковой структурой в расположении узлов решетки а, следовательно, и одинаковыми физическими свойствами.

5.261. См. рисунок 5.5'

5.262. Прimitives ячейкой является 60° -й ромб; гексагональная структура инвариантна к повороту на $2\pi/6$ относительно оси, проходящей через точку решетки перпендикулярно ее плоскости (ось 6-го порядка), и имеет две плоскости зеркального отражения. Поэтому ее группу симметрии обозначают часто как $6mm$.

5.263. 1) $3C_4$, $4C_3$, $5C_2$, $9P$, I ;
2) C_4 , $4C_2$, $5P$, I
3) C_6 , $6C_2$, $7P$, I .

5.264. 4,04 Å.

5.265. Увеличится на 4%.

5.266. 0,52; 0,68; 0,74.

5.267. 3,14 Å; 6,28 Å.

5.268. На одну элементарную ячейку приходится 4 иона Na и 4 иона Cl. Объем d^3 занимают 4 молекулы, объем одного моля $V_\mu = d^3 N_A / 4 = \mu / \rho$, $d = (4\mu / N_A \rho)^{1/3} = 5,64$ Å.

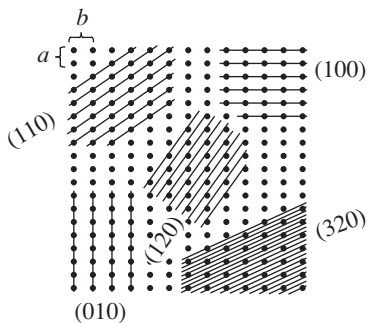


Рис. 5.5'

5.269. Решение. Пусть a_1, a_2 — соответствующие постоянные решетки. Тогда $d_1 = (\sqrt{2}/2)a_1$, $d_2 = (\sqrt{3}/2)a_2$. В гранецентрированной решетке на одну ячейку приходится 4 атома, а в объемноцентрированной — 2. По условию объем, приходящийся на один атом, не изменяется, поэтому $a_1^3/4 = a_2^3/2$ и $d_1/d_2 = 2^{1/3}\sqrt{2/3} = 1,03$.

5.270. $\sim 8 \cdot 10^{-2}$ эВ.

5.271. $T = 14$ К, $a = 3,3$ Å.

5.272. Пик от диагоналей расщепится на два:

$$d^* = \frac{d_0}{\cos(\pi/2 - \theta)} \simeq d_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right); \quad \theta \simeq \left(\frac{1}{20}\right) \text{ рад}, \quad d^* \simeq 1,001d_0.$$

Расстояние между пиками равно $2d \sin \theta = n\lambda$. Угловое разрешение

$$\left| \frac{\Delta \theta}{\theta} \right| = \left| \frac{\Delta d}{d} \right| = 10^{-3}.$$

5.273. По условию Вульфа–Брэгга $\sin \theta = n\lambda/2d \leq 1$, поэтому угол скольжения $\theta = 60,5^\circ$.

5.274. Решение. Отражение от плоскостей, проходящих через грани куба, может быть лишь тогда, когда разность фаз от соседних плоскостей равна 2π . В случае объемноцентрированной кубической решетки есть еще одна промежуточная атомная плоскость, проходящая через атомы в центре куба, и получается, что разность между последовательными параллельными плоскостями равна π . Это означает, что результирующая амплитуда равна $1 + e^{-i\pi} = 1 - 1 = 0$.

8. Динамика атомов кристаллической решетки. Фононы

5.275. Решение. Из условия $l = n\lambda/2$, где λ — длина волны, $n = 1, 2, 3, \dots$ — число полуволн, укладывающихся на длине l , получим, что $n = l\omega/\pi v$. Таким образом, каждому значению n отвечает определенная частота ω , а значит в интервале частот $d\omega$ число колебаний $dZ = dn$ или

$$dZ = \frac{1}{\pi v} d\omega.$$

5.276. $v = \frac{\omega}{k} = \frac{2s}{ka} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$, $u = \frac{d\omega}{dk} = s \left| \cos \frac{ka}{2} \right|$, где скорость звука $s = a\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$.

5.277. $C = 3,3 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$; $v = \sqrt{2}aC/\pi$, $-\sqrt{2}aC/\pi$, aC/π , $\sqrt{2}aC/3\pi$; $u = aC/2\sqrt{2}$, $-aC/2\sqrt{2}$, 0 , $-aC/2\sqrt{2}$; эквивалентными являются фононы, соответствующие $k = -\pi/2a$ и $3\pi/2a$.

5.278. В 2 раза.

5.279. $\omega = (\pi/20)(s/a) \simeq 1,05 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$.

5.280. Решение. Так как NaCl образует при кристаллизации гранецентрированную кубическую решетку, то можно считать, что ее фононный спектр описывается моделью одномерной двухатомной цепочки. Это означает, что в этом кристалле могут возбуждаться как акустические, так и оптические колебания. В центре зоны Бриллюэна, т.е. при $k = 0$, частота акустических колебаний равна нулю, а оптических $\sqrt{2\gamma/\mu}$ и эта частота является максимальной частотой колебаний для двухатомной линейной цепочки. Для NaCl приведенная масса

равна $\mu = mM/(m + M) = 14$ а.е.м. Длина волны оптических колебаний при $k = 0$ равна

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu}{2\gamma}} = 60 \text{ мкм},$$

что и требовалось показать.

5.281. $\theta = \frac{\hbar}{k_B} \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{1/s_l^3 + 2/s_t^3}} = 470 \text{ К}$, где n — число атомов в единице объема.

5.282. Максимум соответствует 180° -рассеянию:

$$\omega = \Omega + \omega', \quad nk = K - nK', \quad \omega = ck, \quad \Omega = sK,$$

$$n(k - k') = \frac{nsK}{c}, \quad n(k + k') = K \rightarrow K = 2 \frac{kn}{1 + ns/c} \simeq 2nk.$$

$$\Omega = sK = 2 \frac{s\omega n}{c} = \frac{4\pi ns}{\lambda} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^{-5}} \simeq 2,5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}.$$

5.283. $\omega = \omega' + \Omega \rightarrow k = k' + sK/c \simeq k'$,

$$K = 2k \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \simeq 2 \frac{\omega n}{c} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{4\pi n}{\lambda} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$\Omega = sK = \frac{4\pi ns}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\pi \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 1,5\sqrt{2}}{6,4 \cdot 10^{-5} \cdot 3} = 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

Разрешение

$$N = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{2\pi c}{\lambda\Omega} = \frac{6,3 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{6,3 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \simeq 10^5.$$

5.284. Решение. В одномерной цепочке с двумя различными атомами (тяжелым $M_1 = M_B$ и легким $M_2 = M_K$) частота колебаний

$$\omega_{\max} = \omega(\pi/a) = \sqrt{2\gamma/M_1}, \quad \omega(0) = \sqrt{\gamma/[2(M_1 + M_2)]}ka,$$

$$1/a^3 = \rho/(4M_1 + 4M_2) \rightarrow a = (4 \cdot 120 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24})/2,74 = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

Поэтому скорость звука $s = \omega_{\max} \sqrt{M_1[4(M_1 + M_2)]}a = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

5.285. Смещение ионов x определяется локальным полем E' , пропорциональным поляризации вещества P :

$$kx = eE', \quad P = nex = \frac{ne^2 E'}{k}, \quad \frac{k}{\mu} = \omega_0^2, \quad \mu = \frac{M^+ M^-}{M^+ + M^-}.$$

Поскольку $\rho = n(M^+ + M^-)$, а $\varepsilon = 1 + P/\varepsilon_0 E = 1 + PE'/(\varepsilon_0 EE')$, мы имеем:

$$\varepsilon - 1 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 \mu \omega_0^2} \cdot \frac{E'}{E} = \frac{\rho e^2}{\varepsilon_0 \omega_0^2 M^+ M^-} \cdot \frac{E'}{E}$$

и, следовательно,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left[\frac{\rho_1 M_2^-}{\rho_2 M_1^-} \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 - 1} \right]^{1/2} \simeq 2,2.$$

5.286. $v = \frac{2Rc}{E_\gamma} \simeq 2 \frac{E_0^2}{2M_{\text{Sn}}c^2} \frac{c}{E_0} = 60 \text{ м/с}$.

5.287. Решение. Поскольку энергия возбуждения атомных ядер всегда много меньше энергии покоя атомного ядра, задачу можно решать в нерелятивистском приближении. Из законов сохранения энергии и импульса следует:

$$p_{\gamma} = p_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{c}, \quad E = E_{\gamma} + R, \quad R = \frac{p_{\gamma}^2}{2M_{\gamma}} = \frac{E_{\gamma}^2}{2M_{\gamma}c^2} \simeq \frac{E^2}{2M_{\gamma}c^2} = 0,047 \text{ эВ}.$$

Энергия излучаемого кванта отличается от энергии перехода на эту же величину.

В случае эффекта Мессбауэра $R \simeq 10^{-23}$ эВ.

5.288. При прохождении через вещество интенсивность излучения уменьшается с расстоянием L по экспоненциальному закону $I = I_0 \exp(-n\sigma L)$. Условие отсутствия заметного поглощения определяется неравенством $n\sigma L \ll 1$ т.е. $L \ll (n\sigma)^{-1}$, где n — число ядер Sn, «принимающих участие» процессе поглощения. Эта величина равна $n = f\varepsilon\rho N_A/A$, где N_A — число Авогадро, A — молекулярный вес BaSnO_3 , который равен 304. Самопоглощение мессбауэровских γ -квантов — резонансный процесс, сечение которого описывается формулой Брейта-Вигнера

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

В резонансе, т.е. при $E = E_0$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} = \frac{4\pi\hbar^2 c^2}{E_{\gamma}^2}.$$

При этом мы учли, что для γ -квантов соотношение между импульсом и волновым вектором линейно $p = \hbar k$, а энергия γ -кванта $E_{\gamma} = pc$, т.е. $k = E_{\gamma}/\hbar c$. Таким образом, получаем, что толщина источника должна удовлетворять неравенству

$$L \ll \frac{AE_{\gamma}^2}{4\pi f\varepsilon\rho N_A \hbar^2 c^2} \simeq 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

$$\mathbf{5.289.} \quad D \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{M}} \frac{E_0}{c} \simeq 10^{-2} \text{ эВ}.$$

$$\mathbf{5.290.} \quad D/R \simeq \sqrt{k_B T M c^2 / E_0^2} = 2,5.$$

$$\mathbf{5.291.} \quad T = \left(\frac{\hbar}{\tau}\right)^2 \frac{M c^2}{k_B E_0} \simeq 10^{-21} \text{ К}.$$

$$\mathbf{5.292.} \quad v = (\Delta E / E) c = 0,4 \text{ мм/с}.$$

$$\mathbf{5.293.} \quad f = \exp[-\hbar^2 k_B^2 / (4\pi \langle p^2 \rangle)].$$

5.294. Решение. При температуре Дебая возбуждаются преимущественно фононы с частотой ω_D , и поэтому среднеквадратичное смещение атомов в решетке можно оценить по формуле $M\omega_D \langle x^2 \rangle \sim k_B \Theta$. Вероятность эффекта Мессбауэра будет примерно равна $f = \exp[-E_{\gamma}^2 / (M k_B \Theta c^2)] \simeq e^{-0,22} \simeq 0,8$. Как видно, для наблюдения эффекта Мессбауэра температуры источника и поглотителя должны быть не больше температуры Дебая.

$$\mathbf{5.295.} \quad 10,2 \text{ Å}.$$

$$\mathbf{5.296.} \quad 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

$$\mathbf{5.297.} \quad \Theta_1 / \Theta_2 = \sqrt{\mu_2 / \mu_1} = 1,6.$$

$$\mathbf{5.298.} \quad E_{\max} = \hbar\omega_{\max} = k_B \Theta = 5,16 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}, \quad p_{\max} = \hbar k_{\max} = 2\pi\hbar / \lambda_{\min} \simeq \pi\hbar / r_0 \simeq 10^{-24} \text{ кг·м/с}.$$

$$\mathbf{5.299.} \quad \left. \frac{n(\omega_D)}{n(\omega_D/2)} \right|_{T=\Theta} = 4 \frac{\sqrt{e}-1}{e-1} \simeq 1,5; \quad \left. \frac{n(\omega_D)}{n(\omega_D/2)} \right|_{T=\Theta/10} = 4 \frac{e^5-1}{e^{10}-1} \simeq 4e^{-5} \simeq 0,027.$$

$$5.300. M\omega^2 x_0^2 \simeq k_B T,$$

$$\omega \simeq \omega_D = k_B \Theta / \hbar, x_0/a \simeq (\hbar/k_B \Theta a)(k_B T/M)^{1/2} \simeq 0,025.$$

$$5.301. C_V = \frac{2\pi^2}{15} \left(\frac{2}{s_t^3} + \frac{1}{s_l^3} \right) \frac{k_B^4}{\hbar^3} T^3.$$

$$5.302. C_1 \propto T, C_2 \propto T^2.$$

5.303. Квадратичная зависимость теплоемкости свидетельствует о том, что кристалл является двумерным; в данном конкретном случае углеродные плоскости разделены большими промежутками.

$$5.304. s = (2\pi^2 k_B / 5a)^{1/3} (k_B T / \hbar) \simeq 5,3 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$\Theta = (6\pi^2)^{1/3} (\hbar s / k_B a) \simeq 520 \text{ К}.$$

$$5.305. 0,385 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

$$5.306. 380 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

5.307. *Решение.* Так как начальная температура много меньше температур Дебая обоих веществ, то справедливо низкотемпературное приближение. Теплота, отбираемая при охлаждении у тел, равна

$$\Delta Q = \frac{\pi^2 k_B^4}{10\hbar^3 s^3} (T_1^4 - T_2^4) \simeq \frac{\pi^2 k_B^4}{10\hbar^3 s^3} T_1^4.$$

Это выражение можно записать в виде

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4 N}{5} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 k_B T.$$

Так как масса кристалла $M = NA$, где A — атомная масса, то $\Delta Q \propto \frac{1}{A\Theta^3}$. Так как масса испарившегося гелия пропорциональна величине отбираемой у тела теплоты, то окончательно имеем:

$$\frac{m_{\text{Pb}}}{m_{\text{Si}}} = \left(\frac{A_{\text{Si}}}{A_{\text{Pb}}} \right) \left(\frac{\Theta(\text{Si})}{\Theta(\text{Pb})} \right)^3 = \frac{28}{207} \left(\frac{645}{95} \right)^3 \simeq 42.$$

$$5.308. C_V(\text{Be}) = \frac{12\pi^4}{5} N_{\text{Be}} k_B \left(\frac{T}{\Theta_{\text{Be}}} \right)^3; C_V(\text{Cu}) = 3N_{\text{Cu}} k_B; \frac{N_{\text{Be}}}{N_{\text{Cu}}} = 1,44,$$

$$\frac{C_V(\text{Be})}{C_V(\text{Cu})} = \frac{12\pi^4}{15} \frac{N_{\text{Be}}}{N_{\text{Cu}}} \left(\frac{T}{\Theta_{\text{Be}}} \right)^3 \simeq 1,1.$$

$$5.309. 6,7 \text{ Дж/(м·с·К)}.$$

$$5.310. 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

$$5.311. \text{Теплоемкость решетки } C_V = 3R, \text{ а теплопроводность}$$

$$\chi = \frac{1}{3} C_V s \lambda_{\Phi} = 0,3R.$$

$$5.312. 30 \text{ нм}.$$

$$5.313. 1953:1.$$

5.314. *Решение.* Максимум теплопроводности будет при условии, что длина свободного пробега фононов определяется границами образца. В этом случае

$$\chi = \frac{1}{3} ds C_V = 2,7 \cdot 10^2 \text{ Вт/(м·К)}.$$

$$5.315. 1,9 \text{ Вт/(м·К)}.$$

5.316. *Решение.* Длина пробега фононов, определяемая рассеянием на примесях, $l \simeq 1/(n\sigma) = 1 \text{ см}$, т.е. при меньших толщинах длина рассеяния будет определяться уже размерами кристалла. Фононная теплопроводность и теплоемкость

определяются соотношениями

$$C_{\Phi} = \frac{2\pi^2}{5} \frac{k_B^4 T^3}{s^3 \hbar^3}, \quad \chi = \frac{1}{3} l s C_{\Phi} = \frac{2\pi^2}{15} \frac{k_B^4 T^3 l s}{s^2 \hbar^3} = 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}.$$

5.317. Решение. Так как $\mu \simeq m$, то оптическая ветвь имеет практически постоянную частоту $\hbar\omega_{\text{оп}} = \hbar\sqrt{2\gamma/m}$ (следует иметь в виду, что в одномерной решетке с двумя разными атомами число колебательных мод в одной ветви равно $N/2$, а не N).

$$E_{\text{оп}} = \frac{N}{2} \langle n \rangle \hbar\omega = \frac{N}{2} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1},$$

$$C_V^{\text{оп}} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) = \frac{N}{2} k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp(\hbar\omega/k_B T)}{[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^2}.$$

Так как $\hbar\omega_{\text{оп}}/k_B \Theta = \sqrt{M/m} = 3$, а $\hbar\omega_{\text{оп}}/k_B T = 30 \gg 1$ то

$$C_V^{\text{оп}} \simeq k_B \frac{N}{2} (\hbar\omega_{\text{оп}})^2 e^{-\hbar\omega_{\text{оп}}/k_B T}.$$

Для одномерной цепочки (учитывая, что $L = Na/2$)

$$E_{\text{ак}} = \frac{L(k_B T)^2}{2\pi\hbar s} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1}, \quad \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} \rightarrow C_V^{\text{ак}} = \frac{\pi^2 k_B}{12} N \left(\frac{T}{\Theta} \right),$$

и соответственно

$$\frac{C_V^{\text{оп}}}{C_V^{\text{ак}}} \simeq \frac{6k_B N (\hbar\omega_{\text{оп}}/k_B T)^2 e^{-\hbar\omega_{\text{оп}}/k_B T}}{\pi^2 k_B N (T/\Theta)} = \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Theta_{\text{оп}}}{T} \right)^2 \left(\frac{\Theta}{T} \right) e^{-\hbar\omega_{\text{оп}}/k_B T} \simeq 5 \cdot 10^{-10}.$$

9. Электроны в кристаллах

5.318. Решение. Число состояний в интервале импульсов $(p, p + \Delta p)$ равно

$$dZ_p = \frac{4\pi p^2 dp}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} p^2 dp.$$

Так как в каждой фазовой ячейке, объем которой $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$, могут находиться два электрона с антипараллельными спинами, то число электронов в рассматриваемом интервале импульсов равно $n(p) dp = 2dZ_p$. Переходя к кинетическим энергиям, получим

$$n(E) dE = \frac{V\sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} dE.$$

5.319. При таких энергиях, когда $\exp[(E - E_F)/k_B T] \gg 1$.

5.320. Решение. Так как заполнена половина зоны проводимости, то это означает, что каждый атом отдает по одному электрону и среднее расстояние между электронами $r \simeq n^{-1/3}$, потенциальная энергия $V_k \simeq e^2/r = e^2 n^{1/3}$, энергия Ферми $E_F = \hbar^2(3\pi^2 n)^{2/3}/2m$.

$$V_k/E_F = \frac{2me^2}{\hbar^2(3\pi^2)^{2/3} n^{1/3}} \simeq 1.$$

5.321. $n = 1,86 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

5.322. 12 эВ.

$$5.323. E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3 \cdot 2,53 \cdot 10^{28}}{6\pi} \right)^{2/3} \text{ Дж} = 3,14 \text{ эВ}.$$

$$5.324. -1,38k_B T \text{ и } -1,38k_B T.$$

$$5.325. 0,6.$$

$$5.326. \text{ Уменьшится в } \sim 1,14 \text{ раза.}$$

$$5.327. 0,65.$$

$$5.328. T = 1490 \text{ К.}$$

$$5.329. p_F = \hbar \sqrt{2\pi n} = 0,83 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

$$5.330. (v_F)_z = E_0 a / \hbar = 2,3 \cdot 10^5 \text{ м/с}, (v_F)_x = (v_F)_y = 0.$$

5.331. *Решение.* Плотность состояний (число энергетических уровней в единице объема) равно

$$g(E) = \frac{\sqrt{2m^3 E}}{\pi^2 \hbar^3},$$

а плотность электронов при энергии E в интервале dE есть

$$dn(E) = n(E) dE = g(E) f(E) dE,$$

где $f(E)$ — функция распределения Ферми–Дирака и при $T = 0 \text{ К}$ она равна единице вплоть до E_F . Подставляя численные значения констант, получаем

$$\left. \frac{dn}{dE} \right|_{E=E_F} = \frac{m^{3/2} \sqrt{2E_F}}{\pi^2 \hbar^3} = 5,4 \cdot 10^{20} \text{ эВ}^{-1}.$$

5.332. *Решение.* Из распределения Ферми при $T = 0$ и при $E = E_F$ следует, что

$$\Delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2 \Delta n}{m(3\pi^2 n)^{1/3}} = 1,8 \cdot 10^{-22} \text{ эВ},$$

где $\Delta n = 2$, так как на каждом энергетическом уровне находится два электрона.

$$5.333. n = \int_0^\infty g(E) f(E) dE = \int_0^{E_F} g(E) dE = \frac{m \sqrt{2m}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE = \frac{2m \sqrt{2m}}{3\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2}.$$

$$5.334. E_{\max} = 5,5 \text{ эВ}.$$

5.335. 1 и 3 соответственно.

5.336. *Решение.* Модулем объемного (изотермического) или всестороннего сжатия вещества K называется величина $-V(\partial P / \partial V)_T$, обратная ей величина — сжимаемость. Так как концентрация электронов n по определению равна N/V (N — полное число частиц), то

$$dn = -\frac{dV}{V^2} N = -n \frac{dV}{V},$$

и соответственно сжимаемость

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial P}.$$

В случае изотропного распределения частиц газа по скоростям и квадратичного закона дисперсии $E(p) = p^2/2m$ давление газа

$$P = \frac{2}{3} n \langle E \rangle = \frac{2}{5} n E_F = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\hbar^2}{3m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} = \frac{2}{3} E_F,$$

и

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{n} \left[\frac{\hbar^2}{3m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} \right]^{-1} = \frac{3m}{\hbar^2} (3\pi^2)^{-2/3} n^{-5/3} = 1,9 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1} \quad (1,9 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}).$$

$$P = (3/5)K \simeq 3,08 \cdot 10^{10} \text{ Па} (3,14 \cdot 10^5 \text{ атм}).$$

Интересно сравнить полученные значения с экспериментально измеренными величинами. Так для алюминия сжимаемость равна $12,7 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, у золота она равна $6 \cdot 10^{-12}$, у железа $5,8 \cdot 10^{-12}$. Как видно, эти величины близки к полученной оценке электронной сжимаемости металла.

$$5.337. K^{-1} = \frac{3}{5P} = \frac{9\pi^2 m}{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{5/3}} = 3,63 \cdot 10^{-5} \text{ атм}.$$

5.338. *Решение.* Пусть концентрация электронов в металле равна n . Как известно, $E_F \propto n^{2/3}$, $\Theta \propto sn^{1/3}$. Поэтому

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta} = \frac{1}{3} \frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{\Delta n}{n} \right) \frac{1}{2} \frac{\Delta E_F}{E_F} = 0,05\%.$$

5.339. *Решение.* При квадратичном законе дисперсии $E = p^2/2m$ плотность состояний (число состояний в единичном интервале энергии) в единице объема равна

$$\nu(E) = \frac{8\pi m^{3/2} \sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^2} \sqrt{E} = A\sqrt{E}.$$

Средняя энергия $\langle E \rangle$ по определению есть

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E \nu(E) dE}{\int_0^\infty \nu(E) dE} = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F.$$

При интегрировании мы учли, что при $T = 0 \text{ К}$ распределение электронов по энергии простирается от 0 до E_F .

$$5.340. \langle T \rangle = 7 \text{ эВ}.$$

$$5.341. \langle E \rangle = 1,93 \text{ эВ}.$$

$$5.342. 1,2 \cdot 10^{-2} m_e.$$

$$5.343. E_F = 9,8 \text{ эВ}, p_F = 1,5 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}, v_F = 2,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

5.344. *Решение.* Заметную вероятность выхода из катода имеют только те электроны, кинетическая энергия которых больше работы выхода и которые движутся в направлении к поверхности. Следовательно, плотность тока dJ_x определяется выражением $dJ_x = ev_x dN$; здесь v_x — скорость вылета, а dN — число электронов с энергией, достаточной для преодоления поверхностного потенциального барьера:

$$v_x = \frac{p_x}{m}, \quad dN = \frac{2}{\hbar^3} f(E) dp_x dp_y dp_z,$$

где распределение Ферми

$$f(E) = \frac{1}{\exp(E - E_F)/k_B T + 1},$$

определяет вероятность для электрона обладать энергией E . Подставляя выражения для v_x и dN в формулу для плотности тока, получаем

$$dJ_x = \frac{2e}{m\hbar^3} f(E) p_x dp_x dp_y dp_z.$$

Если теперь проинтегрировать это выражение по p_y и p_z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ а по компоненте p_x от p_x^l до $+\infty$, то мы получим формулу Ричардсона–Дешмана.

5.345. Решение. Когда электрон испускается поверхностью металла, на ней образуется вакансия с зарядом $+e$, который создается за счет вырванного отрицательно заряженного электрона. Таким образом, возникает кулоновская сила притяжения между отрицательным электроном и положительно заряженной дыркой. Если вырванный электрон удалится на расстояние x от поверхности, то сила притяжения между этими зарядами имеет вид

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Если электрон находится во внешнем электрическом поле E , на него действует еще одна сила eE . На некотором критическом расстоянии a рассмотренные две силы равны одна другой:

$$eE = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 a^2},$$

откуда находим

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^{1/2}.$$

Чтобы полностью удалить электрон из области кулоновского притяжения (сил зеркального изображения), необходимо сообщить ему энергию, достаточную для прохождения расстояния a , а также некоторую дополнительную энергию, необходимую для перемещения его в бесконечность. Таким образом, электрон должен приобрести энергию

$$\mathcal{E}_p = eEa + \int_a^\infty \left(-\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \right) dx = eEa + \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$

Эта формула отражает вклад электрического поля в полную энергию. Если мы подставим в нее вместо a его значение, то получим дополнительную энергию, которую получит электрон за счет электрического поля, равную

$$\left(\frac{e^3 E}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2}.$$

Эта дополнительная энергия снижает работу выхода на величину

$$\Delta\varphi = \left(\frac{eE}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2}.$$

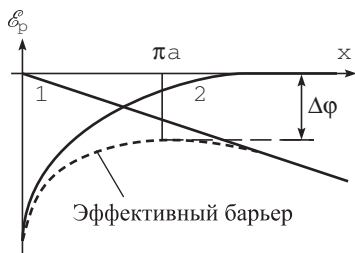


Рис. 5.6'

На рисунке 5.6' показаны графики зависимости как отдельных членов выражения для $\mathcal{E}_p$, так и всей энергии в целом от расстояния до катода: 1 — вклад внешнего электрического поля, 2 — вклад поля на поверхности.

5.346. Решение. При наличии электрического поля, снижающего работу выхода на $\Delta\varphi$, формула Ричардсона–Дешмана преобразуется к виду

$$J = AT^2 \exp \left(-\frac{\varphi - \Delta\varphi}{k_B T} \right) = AT^2 \exp \left(\frac{-\varphi}{k_B T} \right) \exp \left(\frac{\Delta\varphi}{k_B T} \right) = J_s \exp \left(\frac{\Delta\varphi}{k_B T} \right).$$

Согласно задаче 5.345 $\Delta\varphi = (eE/4\pi\epsilon_0)^{1/2}$.

Подставив численные значения, получим

$$\frac{J}{J_s} = \exp\left(\frac{0,44E^{1/2}}{T}\right) = \exp(0,139),$$

откуда $J = 1,15J_s$, т.е. приложенное поле способствует увеличению тока на 15%.

5.347. По условию задачи $J = 1,1J_s$, т.е. мы можем написать, что $\exp(\Delta\varphi/k_B T) = 1,1$ (см. решение зад. 5.352), откуда следует, что

$$\frac{\Delta\varphi}{kT} = \ln 1,1 = 0,0953, \quad \Delta\varphi = e\left(\frac{eE}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/2} = 2,63 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Напряженность поля и приложенная разность потенциалов между плоскопараллельными пластинами связаны соотношением $E = V/d$. Поэтому

$$\left(\frac{2\Delta\varphi}{e}\right)^2 = \frac{eV}{\pi\epsilon_0 d}.$$

Таким образом, требуемая разность потенциалов равна $V = \frac{\pi\epsilon_0 d}{e} \left(\frac{2\Delta\varphi}{e}\right)^2 = 1880 \text{ В.}$

5.348. 0,8%.

5.349. В расчете на один атом $C_{\text{реш}}(3K) = 6 \cdot 10^{-4} k_B$, $C_{\text{реш}}(300K) = 3k_B$, $C_{\text{эл}}(3K) = 2,4 \cdot 10^{-4} k_B$, $C_{\text{эл}}(300K) = 2,4 \cdot 10^{-2} k_B$.

$$\textbf{5.350. } T = \left(\frac{5k_B\Theta}{24\pi^2 E_F}\right)^{1/2} \quad \Theta \simeq \frac{\Theta}{50} = 10 \text{ К.}$$

$$\textbf{5.351. } 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Р/с.}$$

$$\textbf{5.352. } 9,2 \cdot 10^{-6} : 1.$$

5.353. Решение. Плотность электронов $n = 1/a^3$, число рассеивающих центров $n_1 = 0,01n$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2}{mn_1\sigma v_F}, \quad v_F = \frac{\hbar}{m}(3\pi^2 n)^{1/3} \simeq \frac{3\hbar}{ma}, \quad \sigma = 100e^2 \frac{\rho a}{3\hbar} = 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

$$\textbf{5.354. } 1,5 \cdot 10^9 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

$$\textbf{5.355. } M\omega_d^2 a^2 = k_B T \rightarrow M a^2 (k_B \Theta / \hbar) = k_B T, \quad a^2 = \hbar^2 T / (M k_B \Theta^2),$$

$$\tau = \frac{\lambda}{v_F} = \frac{1}{v_F n \pi a^2}, \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{M}{m} \frac{k_B e^2 \Theta^2}{\hbar^2 v_F \pi T}, \quad \rho = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см.}$$

$$\textbf{5.356. } 1,7 \text{ и } 3,7 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м соответственно.}$$

$$\textbf{5.357. } 21,6 \text{ нм; } 1,85 \text{ м/с.}$$

$$\textbf{5.358. } E_F = E_i = 13,6 \text{ эВ, } n = (2mE_F/\hbar^2)^{3/2}/(3\pi^2),$$

$$\rho = nM_H = \frac{(2mE_i)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} M_H \simeq 600 \text{ кг/м}^3.$$

Внешнее давление должно быть равно давлению электронного газа: $P \simeq nE_F = 10^7 \text{ атм.}$

5.359. Решение. Конечное сопротивление мостика появится только тогда, когда длина волны де Бройля электронов $\lambda_{\text{дБ}} = 2\pi/k_F \leq 2d$. В двумерной системе $k_F = \sqrt{2\pi n}$, и поэтому критическое значение n_s равно $\pi/2d^2 = 1,6 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-2}$.

5.360. Проницаемость барьера D равна $D = D_0 \exp[-(2/\hbar)\sqrt{2mU_0}d]$. Скорость электрона $v \sim \hbar/ma$, частота попыток $\nu = v/a = 10^{16} \text{ с}^{-1}$, а время туннелирования $\tau = 10^{-16} e^{3,3} = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ с.}$ Ширина зоны $\Delta E = \hbar/\tau \simeq 0,25 \text{ эВ.}$

$$5.361. P(E) = \left[1 + \exp \left(\frac{E - E_F}{kT} \right) \right]^{-1} = (1 + \exp 20)^{-1} = 2,06 \cdot 10^{-9}.$$

Энергия излучения с $\lambda = 1,0$ мкм равна

$$E = h\nu = hc/\lambda = 2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,24 \text{ эВ},$$

и соответственно 0,62 эВ для 2,0 мкм. Поскольку $1,24 \text{ эВ} > 1 \text{ эВ}$, т.е. больше ширины запрещенной зоны данного материала, то вероятность нахождения электронов в зоне проводимости увеличивается, но излучение с длиной волны 2 мкм не изменяет вероятность перехода электрона в зону проводимости.

5.363. 4 К.

5.364. 1,4 эВ.

5.365. $8,4 \cdot 10^{-4}$ Ом·м.

5.366. $10^{-4}; 1$.

5.367. $5 \cdot 10^{-4}$ эВ; $1700 r_B = 10^{-7}$ м.

5.368. 2 Ом.

5.369. В 5000 раз.

5.370. 1,3 эВ.

5.371. *Решение.* Концентрация собственных носителей тока n_i определяется выражением $n_i^2 = Q_c Q_v \exp(-\Delta/k_B T)$. Эффективные плотности состояний (факторы зоны) пропорциональны $T^{3/2}$. Фактор $k_B T$ равен 0,025 эВ при 300 К и 0,027 эВ при 323 К. Поэтому

$$\frac{n_i(323 \text{ К})}{n_i(300 \text{ К})} = \left(\frac{323}{300} \right)^{3/2} \left[\frac{\exp(-0,7/0,027)}{\exp(-0,7/0,025)} \right]^{1/2} \simeq 3.$$

5.372. *Решение.* Аналогично решению задачи 5.377:

$$\frac{n_i(323 \text{ К})}{n_i(300 \text{ К})} = \left(\frac{323}{300} \right)^{3/2} \left[\frac{\exp(-1,1/0,027)}{\exp(-1,1/0,025)} \right]^{1/2} \simeq 8,3.$$

Удельное сопротивление чистого кремния определяется выражением

$$\rho(300 \text{ К}) = 1000 \text{ Ом} \cdot \text{м} = \frac{1}{n_i e(\mu_p - \mu_n)}.$$

Следовательно

$$\frac{\rho(323 \text{ К})}{\rho(300 \text{ К})} = \frac{n_i(300 \text{ К})}{n_i(323 \text{ К})}.$$

При температуре 50°C

$$\rho(323 \text{ К}) = \rho(300 \text{ К}) \frac{n_i(300 \text{ К})}{n_i(323 \text{ К})} = 214 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

5.373. *Решение.* Полная энергия складывается из теплового возбуждения имеющих в зоне проводимости электронов и дырок в валентной зоне, число которых равно n_e (энергия каждого электрона и дырки равна $(3/2)k_B T$) и перевода новых электронов из валентной зоны, на что требуется энергия Δ . Получаем для электронной теплоемкости

$$C_3 = dU/dT = (d/dT)[(\Delta + 3k_B T)n_e] = 3k_B n_e + \Delta(dn_e/dT).$$

Мы пренебрегли членом $(3k_B T/2)(dn_e/dT)$, так как $3k_B T/2 = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \ll \Delta = 1,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Концентрация электронов в зоне проводимости $n_e = A \exp(-\Delta/2k_B T)$, и потому выражение для теплоемкости принимает вид $C_3 = 3k_B n_e + (\Delta/k_B T)^2 (k n_e/2)$. Так как температура образца больше дебаевской, то

для решеточной теплоемкости можно пользоваться классической формулой $C_p = 3Nk_B$, и тем самым для отношения теплоемкостей имеем

$$\frac{C_v}{C_p} = \frac{n_e}{N} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{k_B T} \right)^2 \right] \simeq \frac{1}{6} \frac{n_e}{N} \left(\frac{\Delta}{k_B T} \right)^2 \simeq 4 \cdot 10^{-4}.$$

5.374. 0,65 эВ.

5.375. $4 \cdot 10^{-5}$.

5.376. $E_{\min} = \frac{2k_B T_1 T_2 \ln \eta}{T_2 T_1} = 0,34$ эВ.

5.377. $\rho = \frac{1}{b\sqrt{n}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/4} e^{E_d/2k_B T} = 2080$ Ом·м.

5.378. Решение. Будем обозначать концентрацию носителей в p -области индексом I , а в n -области — индексом 2. Пусть величина запорного потенциала равна V . Тогда отношение концентраций дырок в p -области и в n -области определяется болцмановским фактором $n_p^{(2)}/n_p^{(1)} = \exp(-eV/k_B T)$, и точно так же $n_n^{(1)}/n_n^{(2)} = \exp(-eV/k_B T)$. По условию задачи $n_p^{(1)} = n_n^{(2)} = n$, а концентрация неосновных носителей $n_p^{(2)} = n_n^{(1)} = n_i^2/n$. Последнее соотношение можно переписать в виде $n_i^2/n^2 = n_n^{(1)}/n = n_n^{(1)}/n_n^{(2)}$, что с учетом выше приведенных формул для отношения концентраций неосновных носителей приводит к формуле $2 \ln(n_i/n) = -eV/k_B T$. Таким образом, величина потенциального барьера на переходе равна

$$eV = -2k_B T \ln(n_i/n) = 2(1/40) \ln(6 \cdot 10^{23}/2 \cdot 10^{17}) \text{ эВ} = 0,75 \text{ эВ}.$$

5.379. 5 мкА.

5.380. Решение. Ток насыщения возникает за счет тепловой генерации неосновных носителей в переходе, где из-за запирающего напряжения, приложенного к переходу, концентрация носителей меньше равновесной. Скорость этой генерации, стремящейся восстановить нарушенное равновесие, пропорциональна равновесной концентрации неосновных носителей по обе стороны ($p-n$)-перехода, которая зависит от температуры по закону $n_{\text{неосн}} \propto \exp(-E_g/k_B T)$. Поэтому изменение тока насыщения определяется соотношением

$$\frac{I_{\text{нас}}(T - \Delta T)}{I_{\text{нас}}(T)} \simeq \exp\left(-\frac{E_g \Delta T}{k_B T^2}\right) \simeq 0,4.$$

5.381. Решение. Ток через переход описывается выражением

$$I = j_s S (e^{eV/k_B T} - 1) \simeq j_s S eV/k_B T = V/R.$$

Мы учли, что $eV/k_B T \ll 1$. Плотность обратного тока

$$j_s = \frac{k_B T}{eSR} = 1,28 \text{ А/м}^2.$$

5.382. Решение. Выпрямляющие свойства полупроводникового диода начнут быстро падать, когда тепловая энергия окажется порядка энергии запорного слоя. Как показано в решении зад. **5.378**, для диода справедливо соотношение $eV/k_B T = 2 \ln(n_i/n_{\text{пр}})$. Это означает, что при условии $eV \simeq k_B T$ должны быть примерно равны концентрации собственных и примесных носителей, т.е. $n_i \simeq n_{\text{пр}}$. Концентрация собственных носителей зависит от величины щели и температуры, и отношение $n_i(T)/n_i(T_0)$ равно:

$$\frac{n_i(T)}{n_i(T_0)} = \frac{\exp(-E_g/2k_B T)}{\exp(-E_g/2k_B T_0)}.$$

Выпрямление исчезает при такой температуре T_m , при которой $n_i(T_m) = n_{np}$, и тем самым для температуры T_m мы получаем соотношение

$$-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{n_{np}}{n_i} \right) = \ln(5 \cdot 10^5) = 13.$$

Отсюда следует, что $T_m \simeq 900$ К.

5.383. 20 В.

5.384. $R_B = -\frac{1}{ne} = -2,45 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{Кл}$; $U_X = R_B BI/l = 2,45 \text{ нВ}$.

5.385. $390 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$.

5.386. В полупроводниках со смешанной проводимостью (n - и p -типа) постоянная Холла зависит от концентрации носителей тока (n, p) и их подвижности (u_n, u_p):

$$R_B = \frac{u_p^2 p - u_n^2 n}{e(u_p p + u_n n)^2}. \text{ Поэтому, эффект Холла не будет наблюдаться, если } \frac{p}{n} = \left(\frac{u_n}{u_p} \right)^2.$$

5.387. $b = cR_B/\rho = 3700 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

5.388. $n = 1,8 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, $u_n = 2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

5.389. $n = \frac{dHU}{ecl\rho V} = 1,25 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $b = \frac{dV}{dHU} = 500 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

5.390. 3,4.

5.391. Решение. $-ne\mathbf{E} + [\mathbf{jB}] = 0$; $\mathbf{S} = [\mathbf{EB}]$. Так как $\mathbf{E} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E} = [\mathbf{jB}]/ne$,

$$\mathbf{S} = -\frac{B^2}{ne}\mathbf{j}.$$

Учитывая, что $B = jr/2$, получаем

$$\mathbf{S} = -\frac{r^2 j^2}{4ne}\mathbf{j}.$$

5.392. $\Delta R_K = h/e^2$.

5.393. Фактор заполнения $\nu = R_1/R_X = 6$, значит

$$n = \nu N_F = \frac{\nu B}{\Phi_0} = 4,3 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}.$$

5.394. Решение. Плотность электронов $n \simeq 1/a^2$, где a — среднее расстояние между электронами. Оценить кулоновскую и кинетическую энергию можно следующим образом

$$U \sim e^2/a, \quad E \simeq E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} 2\pi n.$$

$$\frac{U}{E} = \frac{e^2}{a} \frac{m}{\pi \hbar^2 n} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, плотность электронов надо уменьшить в 100 раз.

10. Сверхпроводимость

5.395. Решение. По уравнению Клайперона–Клаузиуса

$$P = P_K \exp \left[\frac{q}{R} \left(\frac{1}{T_K} - \frac{1}{T_C} \right) \right] = 1 \cdot \exp \left[10 \left(\frac{1}{4,22} - \frac{1}{4,15} \right) \right] = 0,961 \text{ атм.}$$

Это соответствует 726 мм рт. ст. При более точном подходе надо учитывать зависимость теплоты парообразования от температуры. В этом случае $P = CT \exp(-q/RT)$, где C — константа, и поэтому необходимое давление

$$P = P_{\kappa} \frac{T_{\kappa}}{T_{\kappa}} \exp \left[\frac{q}{R} \left(\frac{1}{T_{\kappa}} - \frac{1}{T_{\kappa}} \right) \right] = 0,945 \text{ атм.}$$

Экспериментальная величина — 715 мм.рт.ст. (0,946 атм).

5.396. Решение. При $T = 0$ в сверхпроводнике в области от $E_F - \Delta$ до $E_F + \Delta$ не существует электронных состояний. Щель $\Delta \simeq k_B T_c$. Поэтому ток через туннельный переход начнет течь при условии $eV = \Delta$. Отсюда $V \simeq k_B T_c / e = 0,8 \cdot 10^{-2}$ В.

5.397. Решение. Индуктивность единицы длины цилиндра $L = \mu_0 \pi a^2$. Изменение запасенной магнитной энергии равно омическим потерям

$$-\frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2} = RI^2, \quad \text{или} \quad -\frac{dU}{dt} = \frac{R}{L} I, \quad \text{и} \quad I(t) = I_0 \exp \left(-\frac{R}{L} t \right).$$

Отсюда сопротивление 1 м шва

$$R = \frac{L}{t} \ln \left(\frac{I_0}{I(t)} \right) = \frac{\mu_0 \pi a^2}{t} \ln 1,01 \simeq 10^{-15} \text{ Ом.}$$

5.398. Решение. Плотность вихрей $n_l = B/\Phi_0$. С другой стороны, площадь равностороннего треугольника с ребром d равна $S = d^2 \sqrt{3}/4$. Каждый вихрь принадлежит 6 ячейкам, поэтому $n_l = 1/(2S) = 2/(\sqrt{3}d^2)$. По закону Вульфа–Брэгга $2h \sin \alpha = n\lambda$, где α — угол скольжения, равный $\theta/2$ в данном эксперименте, $h = d\sqrt{3}/2$. Поэтому

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{3} \sin(\theta/2)}, \quad B = n_l \Phi_0 = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}d^2} \simeq \frac{\sqrt{3}\Phi_0 \theta^2}{2\lambda^2} \simeq 1,9 \text{ Тл.}$$

5.399. Решение. Индукция магнитного поля вдоль его оси равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{r^3}.$$

Магнитное поле на поверхности сверхпроводника можно найти, воспользовавшись методом зеркальных изображений. Потенциал диполя с моментом μ , расположенного на высоте r от поверхности сверхпроводника, в поле «зеркального» диполя $B = (\mu_0/4\pi)\mu/(2r)^3$, находящегося на расстоянии $2r$ от него, равен

$$|U| = \mu B = \frac{2\mu_0 \mu^2}{4\pi (2r)^3}.$$

Магнитное поле у поверхности есть сумма полей от исходного и зеркального диполя и его максимально возможное значение равно критическому полю

$$B_c = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{(2r)^3}.$$

Таким образом, расстояние диполя от поверхности сверхпроводника, на котором поле у поверхности равно критическому, равно

$$r^3 = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\mu}{B_c}.$$

Сила, действующая на исходный диполь со стороны зеркального диполя

$$F = -\frac{\partial U}{\partial (2r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu^2}{8r^4}.$$

Парение магнитного диполя возможно только тогда, когда его вес P меньше силы отталкивания от сверхпроводника:

$$P \leq \frac{3}{8} \frac{\mu^{2/3}}{B(\mu_0/4\pi)^{1/3}} \left(\frac{B_c}{2} \right)^{4/3} \simeq 0,6 \text{ Н.}$$

Таким образом, максимальная масса парящего диполя составляет примерно 0,06 кг.

5.400. Решение. Из уравнения Лондонов следует, что поле в сверхпроводник проникает по закону $B(x) = B_0 \exp(-x/\lambda_L)$. Согласно уравнению Максвелла

$$j_{\max} = \left(\frac{dB}{dx} \right)_{\max} = \frac{B_c}{\lambda_L} = 8 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2.$$

5.401. $B = 10^{-5}$ Тл.

5.402. Решение. Пусть плоскость $x = 0$ проходит по центру тонкой пластинки (пленки), поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, магнитное поле направлено по оси z . Поле внутри пластины должно удовлетворять уравнению Лондонов. Учитывая, что по соображениям симметрии индукция B внутри пластины должна быть направлена вдоль оси z и зависеть только от x , это уравнение можно записать в виде $d^2 B/dx^2 - \lambda_L^{-2} B = 0$ с граничными условиями $B(\pm d/2) = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $B = B_1 \text{ch}(x/\lambda_L) + B_2 \text{sh}(x/\lambda_L)$, где B_1, B_2 — постоянные интегрирования. Подставляя граничные условия, получим и решим два алгебраических уравнения с двумя неизвестными B_1 и B_2 . В результате имеем окончательно

$$B(x) = B_0 \frac{\text{ch}(x/\lambda_L)}{\text{ch}(d/\lambda_L)}.$$

Воспользовавшись этим уравнением и уравнением Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$, можно найти плотность сверхтока в пластине

$$j_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_0}{\lambda_L} \frac{\text{sh}(x/\lambda_L)}{\text{ch}(d/\lambda_L)}.$$

Из полученного решений следует, что и магнитное поле и ток проникают вглубь пластины только на глубину порядка λ_L , если пластина толстая ($d \gg \lambda_L$). Если же это тонкая пленка ($d \ll \lambda_L$), то, разлагая гиперболические функции по степеням малых параметров x/λ_L и d/λ_L , получим, учитывая, что при малых аргументах $\text{ch } x = 1 + x^2/2$:

$$B = B_0 \frac{1 + x^2/2\lambda_L^2}{1 + x^2/8\lambda_L^2}, \quad j_s = \frac{B_0 x}{\mu_0 \lambda_L^2}.$$

Это означает, что магнитное поле практически полностью проникает в пленку, а плотность сверхтока — линейная функция координаты. Токи текут по краям пластины так, чтобы созданное ими магнитное поле уничтожило внешнее поле B_0 в глубине пластины. Распределение поля и тока в пластине при $d \sim \lambda_L$ показано на рис. 5.7'. Из найденного распределения поля в пленке легко найти неоднородность поля $\Delta B/B$ как разность поля в центре пластины и на краю, деленную на величину поля:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B(d/2) - B(0)}{B(d/2)} \simeq \frac{d^2}{8\lambda_L^2}.$$

5.403. Решение. Длина волны, соответствующей резонансу, равна $\lambda = c/\nu = 30$ м, поэтому задачу можно считать

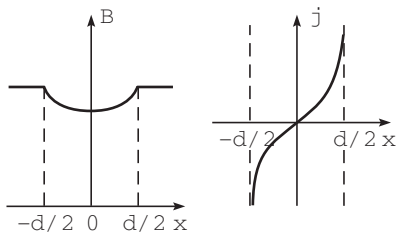


Рис. 5.7'

статической. Оценим лондоновскую длину данного сверхпроводника

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2} = \frac{10^{-30}}{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{28} \cdot 2,6 \cdot 10^{-38}} = 10^{-15}, \quad \lambda_L = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Таким образом, по сравнению с диаметром цилиндра вкладом лондоновской длины, определяющей расстояние, на которое проникает поле, можно пренебречь. Следовательно, внутри сверхпроводящего цилиндра поле равно нулю, поток уменьшится в 4 раза, индуктивность также в 4 раза, так как $\Phi = LI$, а резонансная частота увеличится ($\omega^2 = 1/LC$) в 2 раза.

5.404. $\Delta = 3,5 k_B T_c / 2 \simeq 1,15 \text{ мЭВ}$.

5.405. Решение. При магнитном поле, равном критическому, проигрыш в энергии по «выталкиванию» поля из сверхпроводника равен выигрышу за счет энергии конденсации электронов. Энергия Ферми равна

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \simeq \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2},$$

где мы оценивали концентрацию электронов как $n \simeq a^{-3}$. Поэтому мы можем написать следующее соотношение для энергии магнитного поля

$$\frac{B_c^2}{2\mu_0} = n_s \frac{\Delta}{E_F} \Delta = \frac{2nma^2\Delta^2}{\pi^2 \hbar^2} = 2mn \left(\frac{2a\Delta}{\hbar} \right)^2.$$

Учитывая, что $\Delta = 1,75 k_B T$, окончательно получаем следующее выражение для энергии электронов в критическом магнитном поле, обусловленное взаимодействием его спина с полем:

$$\begin{aligned} E = \mu_B B &= \frac{6\mu_B k_B T}{\hbar} \sqrt{\frac{2m\mu_0}{a}} \simeq \\ &\simeq \frac{6 \cdot 0,9 \cdot 10^{-23} \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 10}{6 \cdot 10^{-34}} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-30} \cdot 1,25 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-10}}} = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} = \frac{1,1 \cdot 10^{-24}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.} \end{aligned}$$

5.406. Решение. Концентрация электронов $n = 2/a^3$. Как следует из решения предыдущей задачи

$$B_c^2 = 2\mu_0 n_s \frac{\Delta^2}{E_F} = \frac{m\mu \sqrt[3]{2}}{a} \left(\frac{3,5 k_B T_c}{\pi \hbar} \right)^2.$$

После подстановки численных значений входящих в это выражение величин получаем, что $B_c = 0,046 \text{ Тл}$. Отметим, что экспериментальное значение индукции критического магнитного поля у тантала составляет $8,3 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$.

5.407. Решение. $\xi \sim \Delta x$, и $\xi \Delta p \sim \hbar$. Неопределенность в импульсах пар Δp находим, используя выражение для групповой скорости частицы $v = \partial E / \partial p$, т.е. $\Delta p = \Delta E / v_F$. Таким образом получаем, что $\xi \simeq \hbar v_F / \Delta E \simeq 0,2 \text{ мкм}$.

5.408. Решение. Энергия E , затрачиваемая на разрушение пары, составляет $\mu_B B$ и имеет порядок энергии связи пары, определяемой критической температурой сверхпроводника, т.е. $\mu_B B \simeq k_B T_c$, а значит $B \simeq k_B T_c / \mu_B \simeq 100 \text{ Тл}$.

5.409. При $B = B_{c1}$, $B_1 = \mu_0 (H_{c1} + I) = 0 \rightarrow I = -B_{c1}$. При $B = 1,25 B_{c2}$, $B_2 = \mu_0 (H + I/2) = \mu_0 (B - B_{c1}/2) = 0,03 \text{ Тл}$.

Плотность вихрей $n = B_2 / \Phi_0$, а среднее расстояние между вихрями

$$d \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Phi_0}{B_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-15}}{0,03}} \simeq 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

5.410.

$$\lambda = (\Phi_0 / \pi B_{c1})^{1/2} = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$\xi = (\Phi_0 / \pi B_{c2})^{1/2} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

5.411. *Решение.* Скорость электронов в вихре находится из условия квантования

$$\oint p dq = 2m \oint v_s dl = 2mv_s \cdot 2\pi r = 2\pi\hbar, \quad v_s = \hbar/2mr.$$

5.412. *Решение.* Момент инерции $J = Mr^2/2$, число вихрей $N = SB/\Phi_0 = \pi r^2 B/\Phi_0$, угловой момент одного вихря длиной l

$$L_1 = \frac{ln_s}{2} \int_{\xi}^{\lambda} 2mv_s r 2\pi r dr = \frac{n_s \pi \lambda^2 \hbar l}{2}, \quad J_{\omega} = N L_1,$$

$$\omega = \frac{\pi^2 n_s \lambda^2 \hbar l B}{\Phi_0 M} \simeq 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек.}$$

Следует отметить, что с ростом температуры момент не изменяется, так как остается постоянным произведение $n_s \lambda^2$.5.413. *Решение.* Со стороны магнитного поля, которое в сверхпроводнике создает плотность вихрей $n = B/\Phi_0$, на текущий ток плотности $j = I/b$ действует сила Лоренца. На единицу объема $dF_{\text{л}} = j B dV$. Эта же сила по третьему закону Ньютона действует на вихревую структуру. Поэтому на единичный вихрь со стороны дефектов действует сила $F = I\Phi_0/B$.

11. Магнетизм веществ

5.414. *Решение.* Ларморова круговая частота прецессии $\omega_{\text{л}} = \mu_0 e H / 2m$ электронной оболочки атома эквивалентна диамагнитному току $I = Ze\omega_{\text{л}}/2\pi$. Магнитный момент кругового тока $\mu = I\pi\bar{\rho}^2$, где $\bar{\rho}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ — средний квадрат расстояний электронов от оси r , взятой в направлении поля H . При сферическом симметричном распределении заряда в атоме $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2$ и средний квадрат расстояния от начала координат $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = (3/2)\bar{\rho}^2$. Отсюда

$$\chi = \frac{\mu N}{H} = -\frac{\mu_0 Z e^2 N^2}{6m} \bar{r}^2.$$

5.415. $1,04 \text{ \AA}$.5.416. *Решение.* Восприимчивость

$$\chi = -\frac{\mu_0 n e^2}{4m} \langle r^2 \rangle.$$

В данном случае мы имеем дело не со сферическо-симметричным распределением заряда, а с цилиндрически-симметричным, и поэтому r — это расстояние от оси (скажем z), т.е. $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{\rho}^2$. Поэтому в знаменателе выражения для восприимчивости стоит численный коэффициент 4, а не 6. Среднее число электронов n в единице объема в данном случае равно $6 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot (0,88/78) \cdot 10^6 = 4,1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, так как у нас в молекуле вносят вклад в восприимчивость 6 электронов. Для случайно ориентированной плоской молекулы $\langle r^2 \rangle = (2/3)(1,4) \text{ \AA}^2$, а значит $\chi = -1,4 \cdot 10^{-6}$, что составляет более 50% от экспериментально наблюдаемой величины.

5.417. Для вычисления диамагнитной восприимчивости атомарного водорода необходимо вычислить средний квадрат расстояния электрона от ядра. Согласно квантовомеханическим правилам вычисления среднего

$$\overline{r^2} = \int_0^{\infty} r^2 \psi^2 4\pi r^2 dr = 3r_1^2.$$

После подстановки этого значения в формулу для χ , получаем $\chi = -2,37 \times 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кмоль}$.

5.418. Решение. Равнодействующий магнитный момент равен

$$\langle M \cos \theta \rangle = \frac{M \int \cos \theta e^{MB \cos \theta / k_B T} d(\cos \theta)}{\int e^{MB \cos \theta / k_B T} d(\cos \theta)}.$$

Раскладывая экспоненту в ряд по малому параметру $MB/k_B T$, получаем

$$\langle M \rangle \simeq \frac{M^2 B}{3k_B T} \quad \text{и, следовательно,} \quad \chi = \frac{M^2}{3k_B T}.$$

В случае ориентирования диполей по или против поля

$$\langle M \rangle = \frac{M(e^{MB/k_B T} - e^{-MB/k_B T})}{(e^{MB/k_B T} + e^{-MB/k_B T})} \simeq \frac{M^2 B}{k_B T}.$$

Восприимчивость в этом случае равна $M^2/k_B T$.

5.419.

$$I = N \mu_B \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

где $a = \mu_B B / k_B T$. При $a \ll 1$

$$I = \frac{\mu_0 N \mu_B^2 H}{k_B T}.$$

5.420. Число атомов в 1 см^3 равно $N = 6 \cdot 10^{23} / 22,4 \cdot 10^3 \simeq 2,6 \cdot 10^{19}$.

Воспользовавшись решением зад. **5.424** для неориентированных диполей, получаем

$$\chi = \frac{N \mu^2}{3k_B T} = 1,4 \cdot 10^{-7}.$$

5.421. $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ А} \cdot \text{м}^3$.

5.422. Решение. Магнетизм ^3He обусловлен магнитным моментом непарного нейтрона, т.е. это ядерный магнетизм. Учитывая, что магнитный момент нейтрона равен $\mu_n = -1,91 \mu_{\text{яБ}}$, легко вычислить парамагнитную восприимчивость жидкого гелия-3, она равна $3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$.

5.423. Решение. Пусть на свободные уровни переходят ν электронов (ν значительно меньше полного числа свободных электронов). При этом их кинетическая энергия увеличится на $\nu^2 \Delta E$, где ΔE — интервал между соседними уровнями.

При переходе следующего электрона кинетическая энергия увеличится на $2\nu \Delta E$, а магнитная энергия уменьшится на $2\mu B$, где μ — магнитный момент электрона. Из равенства $2\nu \Delta E = 2\mu B$ находим ν , затем суммарный магнитный момент непарных электронов $I = 2\nu \mu$ и парамагнитную восприимчивость χ :

$$\chi = \frac{m \mu^2}{\pi^2 \hbar^2} (3\pi^2 n)^{1/3} = 6 \cdot 10^{-7}.$$

5.424. $H_W \simeq k_B \Theta / \mu_B = 1,6 \cdot 10^3$ Тл.

5.425. Решение. Упорядочение есть результат энергии взаимодействия двух магнитных диполей, если считать только одного ближайшего соседа, что достаточно для оценки:

$$\Delta E \simeq \mu_B B = \mu_0 \mu_B^2 (4\pi a^3) > k_B T, \quad T_{\max} \simeq \mu_0 \mu_B^2 (4\pi k_B a^3) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ К.}$$

5.426. Для каждого атома магнитное квантовое спиновое число $m_s = \pm 1/2$, и если обменный интеграл J отрицателен для рассматриваемой конфигурации электронов, то энергия триплетного состояния ($S_i = S_j = 1/2$) равна

$$U_{\text{о6}} = -2(-|J|) \frac{1}{2} \frac{1}{2} = |J|/2,$$

а в синглетном ($S_i = 1/2, S_j = -1/2$)

$$U_{\text{о6}} = -2(-|J|) \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -|J|/2.$$

Разность энергий синглетного и триплетного состояний равна $-|J|/2 - |J|/2 = -|J|$, т.е. действительно синглетное состояние молекулы водорода обладает более низкой энергией.

5.427. $W_{\text{о6}} \simeq k_B T_C = 8,7 \cdot 10^{-21}$ Дж = 0,054 эВ.

5.428. $J \simeq \frac{k_B T_C}{n S^2} = 2,76 \cdot 10^{-23}$ Дж = $1,7 \cdot 10^{-4}$ эВ.

5.429. Решение. Обменная энергия представляет собой разность между средними значениями кулоновской энергии для параллельных и антипараллельных спинов $\mathbf{S}_i$ и $\mathbf{S}_j$. Пусть магнитный атом имеет n ближайших соседей. Энергия, требуемая для переворота данного спина в присутствии всех других спинов, вдвое больше обменной энергии с какой-то определенной ориентацией спина, так как $U_{\uparrow\uparrow} = -U_{\uparrow\downarrow}$ (см. зад. 5.433). Поэтому ее можно записать (пренебрегая компонентами спина $\mathbf{S}$, перпендикулярными к направлению средней намагниченности) в следующем виде:

$$U \simeq 2(2JnS^2),$$

где S — среднее значение $\mathbf{S}$ в направлении намагниченности.

По теории Вейсса воздействие всех спинов на данный характеризуется средней намагниченностью $I = \mu/V$, и мы эту же энергию переворота спина можем записать в виде $U = 2\mu H_{\text{эфф}} = 2\mu \lambda I = 2\mu \frac{\lambda \mu}{V}$, где V — объем, приходящийся на один атом. Средний магнитный момент электрона, обусловленный его спином, есть $\mu = gS\mu_B$. Следовательно, для константы Вейсса λ мы получаем следующее выражение

$$\lambda = \frac{2nJV}{g^2 \mu_B^2}.$$

5.430. В ферромагнетиках векторы спиновых магнитных моментов соседних электронов выстраиваются параллельно, тогда как внутри доменной границы происходит постепенный поворот вектора самопроизвольной намагниченности, что приводит к изменению обменной энергии. Обменная энергия между двумя электронами i и j равна

$$E_{ij} = -2J\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j = -2JS^2 \cos \varphi_{ij},$$

где φ_{ij} — угол между спиновыми магнитными моментами электронов. Если этот угол мал, то добавка к обменной энергии за счет непараллельности спинов в первом приближении равна

$$\Delta E_{ij} \simeq JS^2 \varphi_{ij}^2.$$

Пусть доменная граница содержит N атомных плоскостей, расстояние между которыми равно a , где a — постоянная решетки. Тогда, так как полный поворот вектора намагниченности на 180° осуществляется с помощью N равных углов $\varphi = \pi/N$, то добавка к обменной энергии из-за неколлинеарности векторов намагниченности в соседних плоскостях будет равна

$$E_{ij} = JS^2 \left(\frac{\pi}{N} \right)^2,$$

а полная обменная энергия в цепочке из N атомов

$$E_{об} = \frac{JS^2 \pi^2}{N}.$$

Мы просуммировали по всей цепочке обменную энергию только соседних спинов, так как обменная энергия очень сильно падает с расстоянием и существенно взаимодействует только ближайших соседей. Всего на единицу площади приходится $1/a^2$ таких цепочек, и потому плотность обменной энергии доменной границы равна

$$w_o = \frac{\pi^2 JS^2}{Na^2}.$$

С другой стороны, появление междоменной границы приводит к увеличению магнитного материала, в котором спиновые магнитные моменты отклонены от направления оси легкого намагничивания. Для оценки можно считать, что плотность энергии анизотропии w_k возрастает на величину, равную произведению объема переходного слоя на энергию анизотропию:

$$w_k \simeq NaK.$$

Реальная ширина междоменной границы будет определяться минимумом суммарной энергии доменной границы

$$w = w_o + w_k \simeq \frac{\pi^2 JS^2}{Na^2} + NaK.$$

Дифференцируя это выражение по числу слоев, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial N} = -\frac{\pi^2 JS^2}{N^2 a^2} + Ka.$$

Число слоев N , соответствующее минимуму энергии междоменной границы, равно

$$N = \left(\frac{\pi^2 JS^2}{Ka^3} \right)^{1/2},$$

и, следовательно, толщина границы

$$\delta = Na \simeq \sqrt{\frac{\pi^2 JS^2}{Ka}}.$$

Оценку величины обменной константы можно сделать из температуры Кюри:

$$J \simeq k_B T_C,$$

и мы окончательно получаем, учитывая, что $S = 1/2$:

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\pi^2 k_B T_C S^2}{Ka}} = \left(\frac{9,8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 1043}{4 \cdot 10^4 \cdot 3,6 \cdot 10^{-10}} \right)^{1/2} \simeq 10^{-7} \text{ м}.$$

5.431. $C \propto T^{3/2}$, закон Блоха.

5.432. $\frac{C_{\text{маг}}}{C_{\text{фон}}} = \frac{2}{3} \frac{s}{v} = 3.$

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

1. Основные физические постоянные

Величина	Обозначение	Числовое значение
Скорость света в вакууме	c	$c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка	h $\hbar = h/2\pi$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Больцмана	k_B	$1,38049 \cdot 10^{-23}$ Дж/град
Число Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Газовая постоянная	R	$8,3$ Дж/(моль·К)
Гравитационная постоянная	γ	$6,7 \cdot 10^{-11}$ Н·м ³ /кг ²
Постоянная Стефана–Больцмана	σ	$5,7 \cdot 10^{-8}$ Вт·м ⁻² ·К ⁻⁴
Постоянная Вина	$b = \lambda_{\max} \cdot T$	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Магнитная постоянная	μ_0	$1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Электрическая постоянная	ε_0	$8,86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Электронвольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Постоянная Ридберга	R	$0,097 \cdot 10^7$ м ⁻¹
«Радиус первой боровской орбиты» для атома водорода	a_B	$5,3 \cdot 10^{-9}$ см
Атомная единица массы	а.е.м.	931 МэВ
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2,4 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$9,3 \cdot 10^{-24}$ А·м ²
Ядерный магнетон	$\mu_{\text{я}}$	$0,51 \cdot 10^{-27}$ А·м ²
Постоянная тонкой структуры	α $1/\alpha$	$7,3 \cdot 10^{-3}$ 137
Масса электрона	m_e	$9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	m_p	$1,7 \cdot 10^{-27}$ кг
Заряд электрона	e	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Магнитный момент протона	μ_p	$+2,8 \mu_{\text{я}}$
Масса нейтрона	m_n	$1,7 \cdot 10^{-27}$ кг 939 МэВ
Магнитный момент нейтрона	μ_n	$-1,9 \mu_{\text{я}}$
Квант магнитного потока	Φ_0	$2,07 \cdot 10^{-15}$ Вб ²

2. Некоторые астрофизические постоянные и единицы

$$1 \text{ год} = 3,1557 \cdot 10^7 \text{ с.}$$

$$1 \text{ св.год.} = 9,46053 \cdot 10^{17} \text{ см.}$$

Солнце

$$\text{Масса Солнца } M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$$

$$\text{Радиус Солнца } R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$$

$$\text{Угловой диаметр Солнца на среднем расстоянии от Земли } \alpha_{\odot} = 31'59.26'' \simeq 0,0093 \text{ рад.}$$

$$\text{Температура поверхности Солнца (эффективная температура) } T_{\odot} = 5770 \text{ К}$$

$$\text{Энергия, излучаемая Солнцем в 1 с, или светимость } L_{\odot} = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$$

$$\text{Солнечная постоянная (полная плотность потока излучения Солнца на среднем расстоянии от Земли до Солнца вне атмосферы Земли) } J_{\odot} = 1373 \text{ Вт/м}^2$$

Земля и Луна

$$\text{Масса Земли } M_3 = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$\text{Средний радиус Земли } R_3 = 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$\text{Средняя плотность Земли } \rho_3 = 5,517 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\text{Среднее расстояние от Земли до Солнца } L_3 = 1,498 \cdot 10^8 \text{ км}$$

$$\text{Среднее расстояние от Земли до Луны } L_{\text{Л}} = 3,844 \cdot 10^5 \text{ км}$$

$$\text{Средняя скорость движения Земли по орбите } v_3 = 29,79 \text{ км/с}$$

$$\text{Угловая скорость вращения Земли } \omega_{\text{рмз}} = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$$

Первая и вторая космические скорости

$$v_1 = \sqrt{gR_3} = 7,91 \text{ км/с}; \quad v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11,19 \text{ км/с}$$

$$\text{Масса Луны } M_{\text{Л}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$$

$$\text{Средняя плотность Луны } \rho_{\text{Л}} = 3,341 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\text{Период обращения вокруг Земли } T_{\text{Л}} = 29,531 \text{ сут.}$$

$$\text{Средний радиус Луны } R_{\text{Л}} = 1738,2 \text{ км}$$

3. Термодинамические величины

$$\text{Количество теплоты } Q = 1 \text{ калория (1 кал)} = 4,18 \text{ Дж}$$

Нормальные условия

$$\text{температура } T_0 = 0^\circ \text{ C} = 273,15 \text{ K} \simeq 273 \text{ град}$$

$$\text{давление } P_0 = 1 \text{ атмосфера (1 атм)} = 760 \text{ мм ртутного столба} = 101325 \text{ Па}$$

$$\text{Средняя молярная масса воздуха } \mu_{\text{возд}} = 28,9 \text{ г/моль}$$

$$\text{Плотность ртути } \rho_{\text{рт}} = 13,6 \text{ г/см}^3$$

$$\text{Плотность воды } \rho_{\text{в}} = 1,0 \text{ г/см}^3$$

$$\text{Плотность льда } \rho_{\text{л}} = 0,9 \text{ г/см}^3$$

$$\text{Удельная теплоемкость воды } C_{\text{в}} = 4,18 \text{ Дж/(г·K)}$$

$$\text{Удельная теплоемкость льда } C_{\text{л}} = 2,09 \text{ Дж/(г·K)}$$

$$\text{Удельная теплота испарения воды } \lambda_{\text{в}} = 2260 \text{ Дж/г}$$

$$\text{Удельная теплота плавления льда } q_{\text{л}} = 335 \text{ Дж/г}$$

4. Кварки и их аромат

Название	Символ	Масса , МэВ	Заряд					
			Q(e)	B	S	C	b	t
Верхний	u	300	+2/3	1/3	0	0	0	0
Нижний	d	300	-1/3	1/3	0	0	0	0
Странный	s	500	-1/3	1/3	-1	0	0	0
Очарованный	c	1500	+2/3	1/3	0	+1	0	0
Красивый	b	5000	-1/3	1/3	0	0	+1	0
Правдивый	t	175000	+2/3	1/3	0	0	0	+1

5. Кварковая структура мезонов и барионов

Частица	Масса, МэВ	Q	I_3	Кварковый состав
π^+	140	+1	+1	$u\bar{d}$
π_0	135	0	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ *
π^-	140	-1	-1	$\bar{u}d$
K^+	494	1	+1/2	$u\bar{s}$
K^0	498	0	-1/2	$d\bar{s}$
K^-	494	-1	-1/2	$\bar{u}s$
p	938	+1	1/2	uud
n	940	0	-1/2	udd
Λ^0	1115	0	0	uds
Σ^+	1189	+1	+1	uus
Σ^0	1192	0	0	uds
Σ^-	1197	-1	-1	dds
Δ^{++}	1236	+2	3/2	uuu
Δ^-	1236	-1	-3/2	ddd
Ξ^-	1321	-1	-1/2	dss
Ξ^0	1345	0	1/2	uss
Ω^-	1672	-1	0	sss
*Истинно нейтральны обе комбинации из кварка и антикварка $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$, но в результате сильных взаимодействий эти кварк-антикварковые состояния могут переходить друг в друга, поэтому определенное значение массы имеет лишь квантовомеханическая суперпозиция этих состояний.				

6. Соотношения между некоторыми единицами систем СИ и СГС

Физическая величина	СИ	СГС	Соотношение
Длина	м	см	$1\text{ м} = 10^2\text{ см}$
Масса	кг	г	$1\text{ кг} = 10^3\text{ г}$
Время	с	с	
Сила электрического тока	А	ед. тока СГС	$1\text{ А} \approx 3 \cdot 10^9\text{ ед. СГС}$
Количество электричества	Кл	ед. заряда СГС	$1\text{ Кл} \approx 3 \cdot 10^9\text{ ед. СГС}$
Сила	Н	дин (дина)	$1\text{ Н} = 10^5\text{ дин}$
Работа, энергия, количество тепла	Дж	эрг	$1\text{ Дж} = 10^7\text{ эрг}$
Мощность N , W , тепловой поток J , Φ	Вт	эрг/с	$1\text{ Вт} = 10^7\text{ эрг/с}$
Давление, напряжение (механическое) T , σ	Па	дин/см ²	$1\text{ Па} = 10\text{ дин/см}^2$
Динамическая вязкость η	Па·с	П (пуаз) дин·с/см ²	$1\text{ Па·с} = 10\text{ П}$
Кинематическая вязкость ν ($\nu = \eta/\rho$)	м ² /с	Ст (стокс) см ² /с	$1\text{ м}^2/\text{с} = 10^4\text{ Ст}$
Коэффициент теплообмена (теплопередачи)	Вт/м ²	эрг/(с·см ²)	$1\text{ Вт/м}^2 = 10^3\text{ эрг/(с·см}^2\text{)}$
Теплопроводность κ	Вт/(м·К)	эрг/(с·см·К)	$1\text{ Вт/(м·К)} = 10^5\text{ эрг/(с·см·К)}$
Температуро-проводность χ	м ² /с	см ² /с	$1\text{ м}^2/\text{с} = 10^4\text{ см}^2/\text{с}$
Электрический потенциал, электрическое напряжение	В	ед. напряжения СГС	$1\text{ В} \approx \frac{1}{300}\text{ ед. СГС}$
Электрическое сопротивление	Ом	ед. сопротивления СГС (с/см)	$1\text{ Ом} \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}\text{ с/см}$

7. Некоторые внесистемные единицы

Килограмм-сила	(кгс)	9,80665 Н (точно)
Атмосфера техническая (килограмм-сила на кв. сантиметр, $1 \text{ кгс/см}^2 = 1 \text{ ат}$)	(ат)	98066,5 Па (точно)
Атмосфера физическая	(атм)	101324,72 Па = 760 мм рт. ст.
Миллиметр водяного столба	(мм вод. ст.)	9,80665 Па
Миллиметр ртутного столба = 1 Торр	(мм рт. ст.)	133,322 Па
Бар*	(бар)	10^5 Па
Лошадиная сила	(л. с.)	735,499 Вт
Ангстрем	(Å)	10^{-8} см
Калория международная	(кал)	4,1868 Дж (точно)
Астрономическая единица длины	(а. е.)	$1,49600 \cdot 10^{11}$ м
Световой год	(св. год)	$9,4605 \cdot 10^{15}$ м
Парсек	(пк)	$3,0857 \cdot 10^{16}$ м
Электрон-вольт	(эВ)	$1,60219 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx$ $\approx 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг
Год	(год)	$3,16 \cdot 10^7$ с
Градус Цельсия	(° C)	$t = T - T_0$, где T_0 — тем- пература в кельвинах, $T_0 =$ = 273,15 К. $1^\circ \text{ C} = 1 \text{ K}$
*Баром в акустике называют иногда единицу звукового давления, равную 1 дин/см^2 , т.е. единицу в 10^6 раз меньшую, чем в таблице 2.		